

# Méthodes à connaître en terminale (Nov 2025)

Ceci est un essai de présentation non exhaustive de techniques et choses à savoir en classe de terminale.

## 1 Résoudre une équation (3<sup>ème</sup>, 2<sup>nde</sup>, 1<sup>ère</sup>)

- On regarde le type de l'équation : degré 1, degré 2, quotient ou autre et on adapte la méthode.
- Degré 1 : Comme en 3<sup>ème</sup>, les  $x$  d'un côté, les constants de l'autre et on termine.
  - Degré 2 : On se ramène à 0 et on factorise à la mains si on peut et sinon on utilise le discriminant  $\Delta$ .
  - Quotient : Enlever les valeurs interdites et réduire au même dénominateur ou utiliser le produit en croix.
  - Autre : Généralement, on se ramène à 0 et on factorise.
  - Attention, si on a une fonction racine carré, ln, ou autre, il vous faut préciser le domaine de résolution...
- Le lien logique à utiliser entre les équations lors de la résolution est en général le symbole  $\Leftrightarrow$ .

### Exemple

Résoudre  $\frac{1}{2} \left( a + \frac{11}{a} \right) = a$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( a + \frac{11}{a} \right) = a &\Leftrightarrow 2a = a + \frac{11}{a} \\ &\Leftrightarrow a = \frac{11}{a} \\ &\Leftrightarrow a^2 = 11 \quad (\text{car } a \neq 0) \\ &\Leftrightarrow a = \sqrt{11} \quad \text{ou} \quad a = -\sqrt{11} \end{aligned}$$

## 2 Résoudre une inéquation (2<sup>nde</sup>, 1<sup>ère</sup>)

- La technique de 2<sup>nde</sup> :
  - On se ramène à 0
  - On réduit au même dénominateur si nécessaire.
  - On factorise.
  - On fait un tableau de signe.
  - On donne les solutions
  - Le lien logique à utiliser entre les équations lors de la résolution est en général, le symbole  $\Leftrightarrow$ .
- Technique de 1<sup>ère</sup> et t<sup>ale</sup> (si la précédente ne fonctionne pas) :
  - On se ramène à une inéquation du type  $f(x) \geq 0$ .
  - On étudie la fonction  $f$
  - On dresse le tableau de variations de  $f$ .
  - Peut-être, on peut alors résoudre.

### Exemple

Lors d'un exercice, l'étude du signe de la dérivée mène à résoudre :  $1 - \frac{11}{x^2} \geq 0$

$$\begin{aligned}1 - \frac{11}{x^2} \geq 0 &\Leftrightarrow x^2 \geq 11 \\ &\Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{11} \quad \text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\Leftrightarrow x \geq \sqrt{11} \quad \text{ou} \quad x \leq -\sqrt{11}\end{aligned}$$

## 3 Montrer une égalité (2<sup>nde</sup>)

C'est une technique vue en 2<sup>nde</sup> : De manière générale, si on veut montrer que  $A = B$ , 3 méthodes sont possibles :

1. On part du membre de gauche (ou de droite) puis on transforme l'expression jusqu'à obtenir l'autre membre. On obtient une démonstration de la forme suivante :

$$\begin{aligned}A &= \dots \\ &= \dots \\ &= B\end{aligned}$$

2. On transforme chacun des deux membres puis on compare les résultats. On obtient une démonstration de la forme suivante :

$$\begin{array}{ll} A = \dots & B = \dots \\ = \dots & = \dots \\ = C & = C \end{array} \quad \text{Il s'en suit } A = B.$$

3. On montre que la différence des deux membres est nulle (pour montrer que  $A = B$ , on montre que  $A - B = 0$ ). On obtient une démonstration de la forme suivante :

$$\begin{aligned}A - B &= \dots \\ &= \dots \\ &= 0\end{aligned}$$

donc  $A = B$ .

### Exemple

Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $x(\ln x)^2 = 4(\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2$ .

En effet pour  $x > 0$  :

$$\begin{aligned}4(\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2 &= 4\left(\sqrt{x} \frac{1}{2} \ln x\right)^2 \\ &= 4x \frac{1}{4} (\ln x)^2 \\ &= x(\ln x)^2\end{aligned}$$

### Exemple

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $x > 0$  :

$$\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n \times \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

En effet :

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n \times \left(\frac{1}{n}\right)^n &= \frac{e^x}{\left(\frac{x}{n}\right)^n} \times \frac{1}{n^n} \\ &= \frac{e^x}{\frac{x^n}{n^n}} \times \frac{1}{n^n} \\ &= \frac{e^x}{x^n} \end{aligned}$$

## 4 Étude des variations d'une fonction (2<sup>nde</sup>, 1<sup>ère</sup>)

Pour étudier une fonction  $f$ .

1. On fait attention au domaine de définition de la fonction.
2. On dérive, on obtient  $f'$  et les variations sont données par le signe de  $f'(x)$  dont il faut justifier le signe proprement. Pour cela, on a des possibilités diverses :
  - a. Généralement, on factorise, on explique que les facteurs positifs n'affectent pas le signe de  $f'(x)$  puis du coup, le signe de  $f'(x)$  est le signe du facteur restant. Si c'est un polynôme de degré 2 ou une fonction affine, il y a un théorème pour connaître le signe. Sinon, on se débrouille avec une inéquation.

### Exemple

Etudier la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = xe^{-x}$ .

Alors pour  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f$  dérivable et  $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$ .

Sur  $\mathbb{R}$  et par propriété :  $e^{-x} > 0$ , donc par règle des signes, le signe de  $f'(x)$  est celui de  $1-x$  qui est affine.

On déduit alors le tableau de variations suivant :

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f$		$\frac{1}{e}$	

- b. On peut aussi résoudre proprement l'inéquation  $f'(x) > 0$ .

### Exemple

On donne  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$f(x) = \sqrt{x} - \left(1 + \frac{1}{4}x\right)$$

Etudier les variations de  $f$ .

Alors on a pour  $x > 0$  :  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4}$ .

Cherchons maintenant le signe de  $f'(x)$ . On résout l'équation :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} > \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} < 4 \quad \text{Par application de la fonction inverse qui est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \quad \text{En divisant par 2 qui est positif.}$$

$$\Leftrightarrow x < 4 \quad \text{Par application de la fonction carré qui est croissante sur } \mathbb{R}_+$$

On en déduit donc le signe de  $f'(x)$  puis le tableau de variations de  $f$  :

$x$	0	4	$+\infty$
$g'(x)$		0	
Variations de $g$	-1	0	

## 5 Étude d'une position relative de deux courbes (2<sup>nde</sup>)

La position relative de deux courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ , c'est donner les intervalles sur lesquels  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus  $\mathcal{C}_g$ , puis en dessous. Généralement, on démarre par la sacro-sainte formule :

La position relative de deux courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  est donnée par le signe de :

$$d(x) = f(x) - g(x)$$

On étudie alors le signe de l'expression  $d(x)$ . Il s'agit le plus souvent de factoriser et de faire un tableau de signes (comme en seconde) ou bien de résoudre une inéquation.

## 6 Rédaction propre en Mathématiques

### 6.1 De l'utilisation des symboles implique et équivalent

Vous faites trop souvent n'importe quoi avec ces symboles. Pour faire simple, **on ne les utilise jamais**. L'unique endroit où vous devez mettre des  $\Leftrightarrow$ , c'est lors de la résolution d'une équation ou d'une inéquation. Le reste du temps, préférer l'utilisation de mots, comme « si et seulement si », « donc »...

### 6.2 Application de propriétés ou théorèmes

Lorsqu'on fait appel à une propriété ou à un théorème. Ça peut être, le théorème de Thalès, Pythagore, CTVI, règle des signes etc ... Utilisez la rédaction suivante : Hypothèse (ce que l'on sait) donc par théorème (donner le nom s'il y en a un) Conclusion...

### Exemples

- Sur  $\mathbb{R}$ ,  $e^{3x+1} > 0$  et  $-3x^2 \leq 0$ , donc par produit  $-3x^2 e^{3x+1} \leq 0$
- Sur  $\mathbb{R}$  :
  - $f$  est strictement décroissante.
  - $f$  est continue
  - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -5$  et  $0 \in ]-5; +\infty[$ ,
 Donc par corollaire du TVI, il existe  $\alpha$  unique tel que  $f(\alpha) = 0$ .

## 6.3 Raisonnement par l'absurde

### Exemple

On considère les points

$$A(3 ; -2 ; 2), \quad B(6 ; 1 ; 5), \quad C(6 ; -2 ; -1) \quad D(0 ; 4 ; -1).$$

Démontrer que les points  $A, B, C$  et  $D$  ne sont pas coplanaires.

On raisonne par l'absurde : S'ils sont coplanaires, alors il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\vec{AD} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC} \quad \text{avec} \quad \vec{AD} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc} \begin{cases} 3\alpha + 3\beta = -3 \\ 3\alpha = 6 \\ 3\alpha - 3\beta = 3 \end{cases} \quad \text{et on déduit :} \quad \begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases} \quad \text{ce qui est absurde.}$$

Ainsi, les points  $A, B, C, D$  ne sont pas coplanaires.

## 6.4 Enchaînement d'inégalités (2<sup>nde</sup>, 1<sup>ère</sup>, t<sup>ale</sup>)

On peut avoir à faire à cette technique lorsqu'on doit montrer une inégalité ou un encadrement et aussi parfois pour résoudre une inéquation.

Il n'y a que 3 façons d'enchaîner les inégalités et il faut **toujours** justifier (en plus, ça vous évite de raconter n'importe quoi) :

- On peut rajouter ou soustraire un même nombre des deux côtés.
- On peut multiplier par un nombre :
  - positif sans changer le sens
  - négatif en changeant le sens.
- On peut appliquer une fonction  $f$  à chaque membre :
  - Si  $f$  est croissante, on garde le sens.
  - Si  $f$  est décroissante, on change le sens.

### Exemple

Les exemples sont très nombreux dans les exercices...

Montrer que si  $u_n \in ]n; n+1[$  alors  $\frac{4}{3n} > \frac{4}{3u_n} > \frac{4}{3(n+1)}$

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :

$$\begin{aligned} & n < u_n < n+1 \\ \text{donc} \quad & \frac{3n}{4} < \frac{3}{4}u_n < \frac{3}{4}(n+1) & (\times \frac{3}{4} > 0 \text{ avec } \frac{3}{4} > 0) \\ \text{donc} \quad & \frac{4}{3n} > \frac{4}{3u_n} > \frac{4}{3(n+1)} & (\text{on applique } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ qui est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*) \end{aligned}$$

## 6.5 Analyse synthèse

### Exemple

Montrer que pour  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{1 + e^{4x}}{2} \geq e^{2x}$$

On fait l'analyse au brouillon et puis on écrit le raisonnement dans le bon sens :

On a pour  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} & (1 - e^{2x})^2 \geq 0 \\ \text{donc} \quad & 1 - 2e^{2x} + e^{4x} \geq 0 \\ \text{donc} \quad & 1 + e^{4x} \geq 2e^{2x} \\ \text{et ainsi} \quad & \frac{1 + e^{4x}}{2} \geq e^{2x} \end{aligned}$$

## 6.6 De l'utilisation d'un paramètre

Il arrive dans certains exercices qu'un paramètre ( $k$  par exemple) apparaisse. Il faut le traiter comme un nombre normal. Si vous voulez faire un graphique à la calculatrice il vous faut fixer une valeur du paramètre.

### Exemple

Soit  $k \in \mathbb{R}$  et pour  $x \in \mathbb{R}$  :  $f_k(x) = \frac{4}{1 + e^{-kx}}$ .

Montrer que  $f'_k(0) = k$ , et interpréter graphiquement.

$$\text{On a pour } x \in \mathbb{R} : f'_k(x) = -\frac{4(-k)e^{-kx}}{(1 + e^{-kx})^2} = \frac{4ke^{-kx}}{(1 + e^{-kx})^2},$$

$$\text{donc } f'_k(0) = \frac{4k}{4} = k.$$

Ainsi en  $A(0; 4)$ ,  $\mathcal{C}_k$  admet une tangente de coefficient directeur  $k$ .

## 7 Des trucs utiles :

### 7.1 Trucs de base

1. Pour  $x > 0$  :  $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ .
2. Si  $a > 0$  :  $x^2 - a = (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$  (Ça se factorise à la main).
3.  $\sqrt{x^2} = |x|$
4. Distance entre deux points  $A$  et  $B$  dans un repère orthonormé : On calcule  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ , puis on a  $AB^2 = x_u^2 + y_u^2$  qui nous donne donc la longueur  $AB$ .

#### Exemple

Soit  $A(1; -2)$ ,  $B(3; 7)$ , alors  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$  et donc  $AB^2 = 4 + 81 = 85$  donc  $AB = \sqrt{85}$ .

5. Vecteur directeur de  $D : y = mx + p$  :  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$
6. Montrer que deux droites ou vecteurs sont orthogonaux : On utilise le produit scalaire.

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \perp \vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \iff \vec{u} \cdot \vec{u}' = xx' + yy' = 0$$

7. Équation de la tangente au point  $A$  d'abscisse  $a$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  :  $T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .  
Et surtout, l'équation réduite est de la forme  $y = mx + p$ ... Pas de  $mx + p$  comme ça tout seul!

### 7.2 Pour ceux qui veulent aller plus loin

1. Égalité de Bernoulli :

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k$$

Et notamment (c'est télescopique) :

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1)$$

## 8 Présentation d'un examen

1. Un cartouche en haut de la page avec le titre, votre nom et prénom.
2. La présentation doit être propre et les tableaux fait à la règle.
3. Eviter les ratures et préférer barrer simplement à la règle.
4. La numérotation des exercices et questions doit être claire et non équivoque. Pas de truc du genre :  $2.f(x) = \dots$  par exemple.
5. Respecter les notations, les indices, les exposant etc... Par exemple :  $f_n \neq fn$
6. Ne pas écrire sur deux colonnes même s'il y a de l'espace.
7. Le jour du vrai bac, on ne commence un exercice qu'en haut d'une page. Jamais en bas ou au milieu.