

# Complementos de Matemáticas para la fase específica de la selectividad

Esther Cohen-Bacri  
Nicolas Marco

Liceo Francés de Barcelona  
2025-2026



# Introducción

Presentamos este libro de complementos para los alumnos del Liceo Francés que quieran preparar la fase específica de matemáticas. Los ejercicios están orientados a la familiarización del estudiante con las técnicas de cálculo y deben ser, tomados como tales. En el caso de presentarse algún error, agradeceremos tengan a bien comunicarlo a los autores.

Queremos agradecer Olivier Peault, « Tex wizard » del LFB por su ayuda en la parte diseño L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, Carmen Marco por su participación en algunos párrafos y Eric Soriano por sus apuntes

Esther Cohen-Bacri; Nicolas Marco



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Sistemas de ecuaciones</b>	<b>1</b>
<b>2. Matrices</b>	<b>5</b>
2.1. Definiciones y propiedades básicas	5
2.1.1. Operaciones	5
2.1.2. Matrices cuadradas	6
2.1.3. Inversa de matrices	7
2.1.4. Matrices Ortogonales	7
<b>3. Determinantes</b>	<b>11</b>
3.1. Definiciones y propiedades	11
3.1.1. Definición	11
3.1.2. Propiedades	11
3.2. Inversa de una matriz	12
<b>4. Matrices y sistemas</b>	<b>17</b>
4.1. Sistemas	17
4.2. Si $\det A \neq 0$ : Regla de Cramer	17
4.3. Si $\det A = 0$ : Gauss	18
<b>5. Rango</b>	<b>21</b>
5.1. Espacios vectoriales	21
5.2. Rango	21
5.2.1. Calcular el rango con los menores	22
5.3. Resolución de sistemas	22
<b>6. Complementos sobre las funciones</b>	<b>25</b>
6.1. Asíntotas	25
6.1.1. Asíntotas verticales	25
6.1.2. Asíntotas horizontales	25
6.1.3. Asíntotas oblicuas	25
6.2. $\sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}^*$	25
6.3. Triángulo de Pascal	26
6.4. Convexidad y concavidad	26
6.5. Receta para estudiar una función	26
6.6. Continuidad	26
6.7. Ejemplos de estudios	26
6.7.1. Para practicar	28
6.7.2. Polinomios	28
6.7.3. Racionales	28
6.7.4. Varios	29
<b>7. Integración</b>	<b>33</b>
7.1. Primitivas importantes	33
7.2. Notaciones	33
7.3. Integración por partes	33

7.4. Integrales de tipo $\int P(x)e^{ax} dx, \int P(x) \operatorname{sen} ax dx, \int P(x) \operatorname{cos} ax dx$ . . . . .	34
7.5. Integrales de tipo $\int \operatorname{cos} xe^{ax} dx$ o $\int \operatorname{sen} xe^{ax} dx$ . . . . .	34
7.6. Integrales de tipo $\int P(x) \ln x dx$ . . . . .	34
7.7. Integral de fracciones racionales . . . . .	34
7.8. Integración por cambio de variable (o sustitución) . . . . .	34
7.8.1. La básico : . . . . .	35
7.8.2. Con astucia . . . . .	36
7.8.3. Por partes . . . . .	36
7.8.4. Con $\operatorname{arc} \operatorname{tg}$ . . . . .	36
7.8.5. Con trigonometría . . . . .	36
7.8.6. Con descomposición . . . . .	36
7.8.7. Área . . . . .	36
7.8.8. Con cambio de variable . . . . .	36
7.8.9. Miscellaneous . . . . .	36
<b>8. Vectores en el espacio</b> . . . . .	<b>39</b>
8.1. Producto vectorial . . . . .	39
8.2. Producto mixto . . . . .	39
8.3. Ecuaciones de recta . . . . .	40
8.4. Ecuaciones de plano . . . . .	40
8.5. Ángulos . . . . .	40
8.6. Distancias . . . . .	40
8.6.1. Punto - Plano . . . . .	40
8.6.2. Punto - Recta . . . . .	40
8.6.3. Recta - Plano (cuando son paralelos) . . . . .	41
8.6.4. Plano - Plano (cuando son paralelos) . . . . .	41
8.6.5. Recta - Recta . . . . .	41
8.7. Posiciones relativas de tres planos . . . . .	42
<b>9. Combinatoria</b> . . . . .	<b>47</b>
9.1. Variaciones con repetición ( $VR_n^k$ ) – orden y repetición. . . . .	47
9.2. Variaciones ordinarias ( $V_n^k$ ) – orden sin repetición. . . . .	47
9.2.1. Definición . . . . .	47
9.3. Permutaciones $P^n$ . . . . .	47
9.4. Combinatoria sin repetición ( $C_n^p = \binom{n}{p}$ ) – sin orden y sin repetición. . . . .	47
9.5. Combinatoria con repetición $CR_n^p$ – sin orden y con repetición. . . . .	48
<b>10. Ejercicios a granel y una selectividad</b> . . . . .	<b>51</b>
<b>11. Algunos resultados...</b> . . . . .	<b>61</b>

# Sistemas de ecuaciones

**Definición 1** 1. Una ecuación lineal es una ecuación polinómica de grado 1 con una o varias incógnitas.

2. Varias ecuaciones lineales dadas conjuntamente forman un sistema de ecuaciones.

3. Resolver un sistema es encontrar el valor de las incógnitas para que se cumpla el sistema.

**Ejemplo 2** El sistema siguiente es un sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas  $x_1, \dots, x_4$

$$\begin{cases} 2x_1 + 12x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 9x_4 = 5 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

**Definición 3** Un sistema de ecuaciones puede tener soluciones (**sistema compatible**) o no tener soluciones (**sistema incompatible**).

Los sistemas compatibles pueden tener una única solución (**determinados**) o infinitas soluciones (**indeterminados**).

**Definición 4** Los sistemas de la siguiente forma se denominan triangulares o escalonados.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ 2y - z = 1 \\ 2z = -4 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ 3z = -4 \\ y - 3z = 1 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$$

**Nota 5** Es fácil resolver estos sistemas. Por lo tanto cuando tengamos un sistema cualquiera, usaremos un método para transformarlo en un sistema triangular. Este método se llama **método de Gauss**.

**Definición 6** Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

**Teorema 7 (transformaciones válidas en un sistema)** Un sistema se transforma en un sistema equivalente cuando se hace una de las transformaciones siguientes.

1. Multiplicar una ecuación por un número distinto de cero.
2. Sustituir una ecuación por el resultado de sumarle una combinación lineal de las demás.
3. Añadir o quitar una ecuación que sea una combinación lineal de las otras.

**Definición 8** El método de Gauss consiste en transformar un sistema de ecuaciones lineales en otro escalonado usando las transformaciones válidas.

**Nota 9** Si bien la teoría es hacer sólo una transformación a cada paso, de hecho pueden hacerse varias simultáneamente, guardando una ecuación y combinando las demás con esta ecuación.

**Nota 11** Los cálculos son mas cómodos si nos limitamos a escribir los coeficientes de las incógnitas usando matrices. Se llega entonces a uno de estos tres casos:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array} \right) \quad \left| \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \quad \left| \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El primer caso es compatible determinado, el segundo es incompatible y el último es compatible indeterminado.

**Método :** Para resolver con el método de Gauss, se requieren 3 pasos :

1. Se cambia el orden de  $L_1, L_2$  y  $L_3$  si hace falta.
2. a) Se quita  $x$  en  $L_2$  combinándola con  $L_1$ .  
b) También se quita  $x$  en  $L_3$  combinándola con  $L_1$ .
3. Ya no hay  $x$  en  $L_2$  ni en  $L_3$ . Se cambia entonces  $L_3$  para quitarle  $y$  combinándola con  $L_2$

El ejercicio siguiente ilustra el método.

**Ejemplo 12** Resolver el siguiente sistema :

$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + y + 2z = 5 \\ 3x - 2y - 2z = -1 \end{cases}$$

Intercambiando  $L_1$  y  $L_2$  en el sistema (más simpático tener 1 delante de  $x$ ) que llamaremos  $S$  tenemos :

$$\begin{aligned} S &\Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \end{array} \right) \\ &\Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & -5 & -8 & -16 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \\ &\Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right) 3L_3 - 5L_2 \end{aligned}$$

Entonces  $L_3$  implica  $z = -3$

$L_2$  no da  $-3y = -9 + 5z$  por lo tanto  $-3y = -24$  y entonces  $y = 8$ .

Con  $L_1$  tenemos  $x = 5 - y - 2z$ , es decir  $x = 3$ .

Por lo tanto el sistema es compatible determinado de solución  $(3; 8; -3)$ .

**Ejemplo 13** Hallar las soluciones del sistema

$$(S) \equiv \begin{cases} 2x - y + 2t = 2 \\ x + 2y - t = 4 \end{cases}$$

Tenemos

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 2t = 2 \\ + 5y - 4t = 6 \end{cases} \quad (2L_2 - L_1)$$

y por lo tanto  $x$  y  $y$  se escriben en función de  $t$ .

$L_2$  nos implica  $y = \frac{6+4t}{5}$ .

Ahora con  $L_1$ ,  $2x = y - 2t + 2 = \frac{6+4t}{5} - 2t + 2 = \frac{-6t+16}{10} = \frac{-3t+8}{5}$ .

Por lo tanto el sistema es compatible indeterminado de soluciones  $\left(\frac{-3t+8}{5}; \frac{6+4t}{5}; t\right)$  con  $t \in \mathbb{R}$ .

**Ejemplo 14** Hallar las soluciones del sistema  $2x - 3y + z + 2 = 0$ .

Es un sistema de una ecuación con tres incógnitas. Se parametriza poniendo  $x = \lambda$ ,  $y = \beta$  con  $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ . Entonces  $z = 3\beta - 2\lambda - 2$  y se deduce que el sistema es compatible indeterminado de soluciones  $(\lambda; \beta; 3\beta - 2\lambda - 2)$  con  $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ .

## Ejercicios

**1** Resuelve los siguientes sistemas :

$$1. \begin{cases} 2x - 3z + 2y = 2 \\ 3x - 7y = 0 \end{cases}$$

$$2. 4x - 2z + y = 5$$

$$3. \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} y + z - 2x = 0 \\ x + z - 2y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 3x - 3y + z = -8 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x - 3y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + 5y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x + 2y + z = 6 \\ x - y - z = -12 \\ 2x - y + z = -11 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2x + y + 2z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

[Con resultado]

**2 Examen 2017**

Se desea recargar el cajero de un banco con billetes de 10, 20 y 50 euros. Por cada 5 billetes de 50 se ha de introducir 1 de 20, mientras que por cada 2 billetes de 20 se han de introducir 3 de 10.

- Plantear un sistema de ecuaciones para determinar la proporción de cada una de las denominaciones de billetes que hay que introducir en el cajero.
- Resolver el sistema mediante la regla de Cramer.
- Si el importe total en euros de todos los billetes ha de ser 28500 euros ¿cuánto billetes de cada denominación hay que introducir en el cajero?

**3 Examen**

En el segundo curso de bachillerato de un instituto hay matriculados un total de 65 alumnos divididos en tres grupos : A, B, y C. Comen en el centro 42 de ellos, que corresponden a la mitad de los del grupo A, las cuatro quintas partes de los del B y las dos terceras partes de de los del C. A una salida fuera del centro acudieron las tres cuartas partes de los del grupo A, todos los del grupo B y las dos terceras partes de de los del C, sumando un total de 52 estudiantes.

- \* Plantear un sistema de ecuaciones para determinar el número de alumnos de cada grupo.
- \* Resolver ese sistema mediante la regla de Cramer.
- \* ¿Cuántos alumnos hay en cada grupo ?

[Con resultado]

**4** Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres.

1. Plantear un sistema para averiguar cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión.
2. Resolver el problema.

**5** El precio de entrada a cierta exposición es de 200 ptas. para los niños, 500 para los adultos y 250 para los jubilados. En una jornada concreta, la exposición fue visitada por 200 personas en total, igualando el número de visitantes adultos al de niños y jubilados juntos. La recaudación de dicho día ascendió a 73.500 ptas.

1. Plantear un sistema de ecuaciones para averiguar cuántos niños, adultos y jubilados visitaron la exposición ese día.
2. Resolver el problema.

[Con resultado]

**6 Examen**

En una tienda on-line se han vendido 800 ejemplares de un libro de texto, entre nuevos y usados, y se ha obtenido un total de 7110 euros. Un ejemplar nuevo cuesta 10 euros, mientras que los ejemplares usados se venden con un descuento que puede ser del 40 % o del 50 % según sea el estado del ejemplar. Se ha comprobado que por cada tres libros nuevos se ha vendido uno usado.

1. Plantear un sistema de ecuaciones para hallar el número de ejemplares nuevos que se han vendido
2. Calcular cuántos ejemplares se vendieron con un descuento del 50 %.

[Con resultado]



# Matrices

## 2.1. Definiciones y propiedades básicas

**Definición 15** 1. Una matriz  $m \times n$  es una tabla rectangular numérica de  $m$  filas y  $n$  columnas. Se dice que es una matriz de dimensión  $m \times n$ .

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Se denomina  $\mathcal{M}_{m,n}$  el conjunto de las matrices de dimensión  $m \times n$ .

2. Cuando  $m = n$  se dice que la matriz es cuadrada.
3. Dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y coinciden término a término.
4.  $A^t = (a_{ji})_{1 \leq j \leq n; 1 \leq i \leq m}$  es la traspuesta de  $A$  (se obtiene invirtiendo líneas y columnas). Entonces tiene  $n$  filas y  $m$  columnas.

**Ejemplo 16**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 8 & -2 \\ -3 & 5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$  entonces  $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 8 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

5. Una matriz se llama simétrica si  $A^t = A$  (entonces es cuadrada).

**Ejemplo 17**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ .

6. Una matriz cuadrada es diagonal cuando  $a_{ij} = 0$  cada vez que  $i \neq j$ .

**Ejemplo 18**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

7. Una matriz cuadrada es triangular superior cuando  $a_{ij} = 0$  cada vez que  $i > j$ .

**Ejemplo 19**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ .

8. Del mismo modo una matriz cuadrada puede ser triangular inferior.

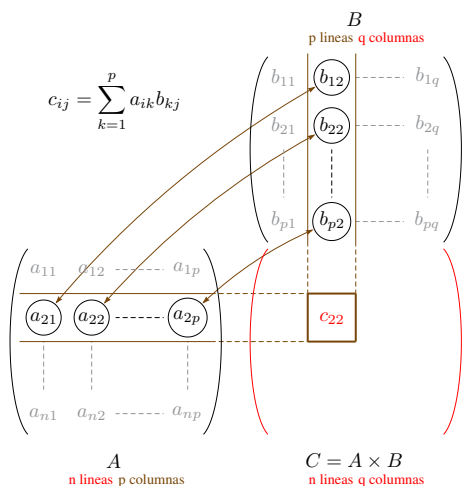
### 2.1.1. Operaciones

**Teorema 20** 1. Se pueden sumar las matrices de mismas dimensiones (término a término).

2. Producto por un número (producto del número por cada término).

3. Si  $A$  es  $n \times p$  y  $B$  es  $p \times q$  se puede calcular el producto  $AB$ . Es una matriz de dimensión  $n \times q$  y su término general es

$$(c_{ij}) = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$



**Reglas :** Todas las reglas de suma, producto, distributividad que se pueden esperar funcionan. Es decir por ejemplo :  $A(B + C) = AB + AC$ .  
 Salvo el producto que **no es conmutativo** :  $AB \neq BA$  en general.

Para los matematicos, teneis aquí dichas reglas :

**Teorema 21** Propiedades de la suma:  $(\mathcal{M}_{m,n}, +)$  es un grupo abeliano es decir

1. Interna
2. Asociativa.
3. Conmutativa
4. Elemento neutro. Es la matriz de  $\mathcal{M}_{m,n}$  compuesta únicamente de ceros.
5. Elemento opuesto. Es la matriz de  $\mathcal{M}_{m,n}$  compuesta de los términos opuestos.

**Teorema 22** Propiedades del producto por un número real.  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $A, B$  matrices de mismo tamaño.

1. Asociativa:  $a(bA) = (ab)A$
2. Distributiva I:  $a(A + B) = aA + aB$
3. Distributiva II:  $(a + b)A = aA + bA$

**Teorema 23** Propiedades del producto de dos matrices

1. Asociativa:  $(AB)C = A(BC)$
2. **No es conmutativa.**

### 2.1.2. Matrices cuadradas

**Definición 24** 1. En  $(\mathcal{M}_{n,n}; \times)$  existe un elemento neutro. Es la matriz  $I$  denominada identidad con 1 en la diagonal y ceros fuera de la diagonal.

**Ejemplo 25**  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  es la matriz identidad de  $\mathcal{M}_{3,3}$ .

2. Para cualquier matriz  $A \in \mathcal{M}_{n,n}$  tenemos  $A \times I = I \times A = A$ .
3.  $B$  es matriz inversa de  $A$  si y solo si  $AB = BA = I$ . Se escribe  $B = A^{-1}$ .

**Nota 26** 1. Se dice que  $(\mathcal{M}_{n,n}, +, \times)$  es un anillo.

2. No todas las matrices tienen inversa (se dicen entonces singulares).

3. Para  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A^n = A \times A \times A \cdots \times A$ .

Por ejemplo para calcular  $A^3$  se calcula  $A^2 = A \times A$  y luego  $A^2 \times A$ .

4. Cuando las matrices son diagonales resulta facil hacer el producto.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}, \text{ entonces } AB = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

### 2.1.3. Inversa de matrices

Estudiaremos varios métodos para calcular la inversa de una matriz. Una posibilidad es la siguiente :

**Teorema 27 (Método de Gauss para hallar la inversa de una matriz)** Se escribe la matriz  $(A|I)$  y usando transformaciones válidas sobre las líneas se llega a  $(I|A^{-1})$ .

**Ejemplo 28** Hallar la inversa de la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Tenemos

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\iff \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &L_2 - 3L_1 \\ &\iff \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -2 & 3 \end{array} \right) &3L_3 - 2L_2 \\ &\iff \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -2 & 3 \end{array} \right) &3L_1 + L_2 \\ &\iff \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -24 & 9 & -12 \\ 0 & 6 & 0 & -9 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -2 & 3 \end{array} \right) &\begin{array}{l} L_1 - 4L_3 \\ L_2 - L_3 \end{array} \\ &\iff \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -2 & 3 \end{array} \right) &\begin{array}{l} \frac{1}{3}L_1 \\ \frac{1}{6}L_2 \\ L_3 \end{array} \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -4 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

### 2.1.4. Matrices Ortogonales

**Definición 29** Se dice que una matriz real, cuadrada e invertible  $A$  es ortogonal si  $A^{-1} = A^t$ , es decir si su inversa coincide con su traspuesta.

**Teorema 30** 1. Una matriz  $A$  es ortogonal si, y sólo si  $A.A^t = I$

2. Una matriz es ortogonal si, y sólo si sus vectores columnas forman un sistema ortonormal (vectores de norma 1 y ortogonales entre si).

3. El producto de dos matrices ortogonales y del mismo orden es una matriz ortogonal (facil de ver).

4. La inversa de una matriz ortogonal es ortogonal (facil de ver).

5. La traspuesta de una matriz ortogonal es ortogonal (facil de ver).

6. El determinante de una matriz ortogonal es 1 o -1 (facil de ver).

## Ejercicios

**7** En cada casos, decir si  $A \times B$  existe y calcular el producto en caso afirmativo.

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

2.  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

4.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

5.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

6.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

7.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

8.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

**8** Sea  $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$ . Hallar  $AB$  y  $BA$ .

**9** Sean  $A, B \in \mathcal{M}_{nn}$ . ¿Funciona la fórmula  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$  con las matrices?

**10** Sea  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ .

1. Hallar  $A^2$  y después  $A^3$ .2. Determinar entonces  $A^n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

[Con resultado]

**11** Dada  $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$ . Hallar

1.  $AB$ 2.  $BA$ .3.  $CB$ .4.  $A + B^t$ 5.  $A^t + B$ .

**12** Hallar la matriz inversa de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ .

**13** Hallar la inversa de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ .

**14** Calcula  $A^n$  siendo  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

[Con resultado]

**15**  $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ , calcula  $A^2, A^3, \dots, A^n$  siendo  $n$  un número entero.

**16** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallar  $A^2$  y demuestra que  $A^2 = A + 2I_3$ , siendo  $I$  la matriz identidad  $3 \times 3$ . Deducir que  $A$  es invertible y hallar  $A^{-1}$ .

[Con resultado]

**17** Determine la potencias  $A^{3k}$  de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$  donde  $a, b$  y  $c$  son números no nulos, y  $k$  es un número natural mayor que 1.**18** Matemáticas II - Junio 2010Determine las sucesivas potencias de la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$  donde  $a$  y  $b$  son números no nulos.

[Con resultado]

**19** Determine las sucesivas potencias de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & x & 3x \\ 0 & 0 & 3x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , donde  $x$  es un número no nulo.

**20** Dada  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ . Estudie si existe la matriz inversa de  $A$ . En caso afirmativo calcúlela.

**21** Halla todas las matrices  $X$  de la forma  $X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$  tales que  $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[Con resultado]

**22** Selectividad Junio 2001

Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Siendo  $I$  la matriz identidad  $3 \times 3$  y  $O$  la matriz nula  $3 \times 3$ , probar que  $A^3 + I = O$ .

2. Calcular  $A^{10}$ .

[Con resultado]

**23** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

1. Calcula el determinante de  $A$

2. Comprueba que  $A$  es una matriz ortogonal

3. Resuelve el sistema de ecuaciones  $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



# Determinantes

## 3.1. Definiciones y propiedades

### 3.1.1. Definición

**Definición 31** El determinante de una matriz cuadrada es un número.

**Ejemplo 32** 1. Determinante de segundo orden. Sea  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ . Entonces

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2. Determinante de tercer orden  $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ . Entonces

$$\det(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

### 3.1.2. Propiedades

#### Traspuesta

El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta:  $|A| = |A^t|$

#### Se puede desarrollar un determinante por filas o columnas

Para ello se usa la tabla de signos siguiente  $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

**Ejemplo 33** 1. Desarrollando por primera fila:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Desarrollando por segunda fila:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

3. Desarrollando por tercera fila:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

4. Desarrollando por primera columna:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

5. Desarrollando por segunda columna:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}$$

6. Desarrollando por tercera columna:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

**Nota 34** En la práctica, habrá que desarrollar por la fila o columna que tenga más ceros.

### Forma multilineal alternada

La aplicación  $A \rightarrow \text{Det}(A)$  es multilineal alternada respecto de sus columnas y filas. Esto implica los resultados siguientes. Sean  $C_1, C_2, \dots, C_n$  las columnas de una matriz de  $\mathcal{M}_{n \times n}$  y  $\lambda$  un número real.

1. Si una matriz tiene dos líneas o dos columnas iguales entonces su determinante es 0.
2. Si una matriz tiene una línea o columna de ceros entonces su determinante es 0.
3. Si una matriz tiene filas o columnas proporcionales entonces su determinante es 0.
4. En un determinante se puede añadir a una columna cualquiera una combinación cualquiera de las otras columnas. Igual para las líneas.
5.  $\det(C_1, C_2, \dots, C_k + C'_k, \dots, C_n) = \det(C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_n) + \det(C_1, C_2, \dots, C'_k, \dots, C_n)$ .
6.  $\det(C_1, C_2, \dots, \lambda C_k, \dots, C_n) = \lambda \det(C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_n)$ .
7. Si  $A$  es una matriz de tamaño  $n \times n$  entonces  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ .
8. Si se permutan dos líneas o dos filas de un determinante entonces cambia de signo.
9. Si  $A, B$  son dos matrices cuadradas entonces  $\det(AB) = \det A \det B$ .
10. Si  $A$  es invertible entonces  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$ .

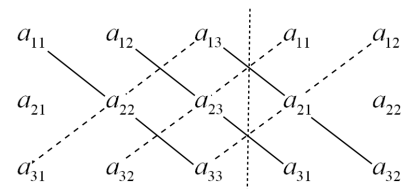
### Regla de Sarrus

La regla de Sarrus es un método fácil para memorizar y calcular el determinante de una matriz  $3 \times 3$ . Recibe su nombre del matemático francés Pierre Frédéric Sarrus.

Sea  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ; Entonces

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

De hecho se hace la suma de los productos de los números de las diagonales negras y después se resta los productos de los números de las diagonales discontinuas.



## 3.2. Inversa de una matriz

**Definición 35** Sea  $A$  una matriz cuadrada. La adjunta de  $A$  es la matriz  $\text{Adj}(A)$  definida sustituyendo cada elemento  $a_{ij}$  por su adjunto calculado haciendo el determinante de  $A$  quitándole la línea  $i$  y la columna  $j$  y alternando los signos (es decir multiplicando por  $(-1)^{i+j}$ ).

**Definición 36** Si en una matriz cualquiera seleccionamos  $r$  filas y  $r$  columnas entonces tenemos una submatriz cuadrada de orden  $r$ . Su determinante es un **menor de orden**  $r$ .

**Ejemplo 37** Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\text{Adj}(A)$  se calcula usando la tabla de signos  $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$  de la forma siguiente:

$$(\text{Adj}(A))_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, (\text{Adj}(A))_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = +14, (\text{Adj}(A))_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = +6, \dots$$

Entonces

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 14 & 6 \\ -2 & 7 & -1 \\ -2 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

**Teorema 38** Sea  $A$  una matriz cuadrada.

$A$  es invertible si y solo si  $\det A \neq 0$  y entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{Adj}(A))^t$$

**Ejemplo 39** Siguiendo el ejemplo anterior tenemos :  $\det(A) = -14$  entonces  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ -1 & -\frac{1}{14} & \frac{1}{14} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{14} & \frac{2}{14} \end{pmatrix}$

## Ejercicios

### Determinantes

**24** Calcula el valor de los determinantes :

$$a = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$b = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$c = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix}$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$e = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$f = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$h = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$i = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}$$

$$j = \begin{vmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$k = \begin{vmatrix} a & a-1 & a(a-1) \\ a & 1 & a \\ a & 1 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$l = \begin{vmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{vmatrix}$$

$$m = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

[Con resultado]

**25** Sea  $a \in \mathbb{R}$ . Determine el valor del determinante  $\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+3 & a+5 & a+7 \\ a+6 & a+9 & a+12 \end{vmatrix}$

**26** Sea  $x \in \mathbb{R}$ . Determine el valor del determinante de la matriz  $A = \begin{pmatrix} x+6 & x-4 & x-3 \\ x+7 & x-3 & x-2 \\ x+8 & x-2 & x-1 \end{pmatrix}$ .

**27** Sabiendo que  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1$ , calcula

$$\bullet \begin{vmatrix} a+3d & c+3f & b+3e \\ -d & -f & -e \\ g & i & h \end{vmatrix} \quad \left| \quad \bullet \begin{vmatrix} f & e & d \\ c & b & a \\ i & h & g \end{vmatrix} \right.$$

[Con resultado]

**28** Se sabe  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 10$ , calcular de manera razonada, aplicando las propiedades adecuadas, el valor de los siguientes determinantes :

$$\bullet \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} \quad \left| \quad \bullet \begin{vmatrix} 3p & 3q & 3r \\ 2a & 2b & 2c \\ -x & -y & -z \end{vmatrix} \right.$$

[Con resultado]

**29** Se dan las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  y  $I$  la matriz identidad.

Hallar el determinante de las matrices

$$\bullet A(2B^2) \quad \left| \quad \bullet A(2B^2)(3A^{-1}) \right.$$

[Con resultado]

**30** Calcula  $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & 2x+5 & 2x+6 \end{vmatrix}$

[Con resultado]

**31** Sabemos que el determinante de una matriz cuadrada  $A$  vale 1 y que el determinante de la matriz  $2A$  vale 16. ¿Cuál es el orden (tamaño) de la matriz  $A$  ?

[Con resultado]

**32** Supuesto que  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & -5 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}$  calcula el valor de los siguientes determinantes :

$$\bullet d_1 = \begin{vmatrix} 2a & -2b & 2c \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -5 & 5 \end{vmatrix} \quad \left| \quad \bullet d_2 = \begin{vmatrix} 7 & 14 & 7 \\ -10 & 20 & 20 \\ 3b & 6a & 3c \end{vmatrix} \right.$$

[Con resultado]

**33** Calcular:

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$$

[Con resultado]

**34** Selectividad septiembre 2005

Sabiendo que:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$$

calcular, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

1.  $|-3A|$  y  $|A^{-1}|$ .

2.  $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix}$ .

3.  $\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix}$ .

[Con resultado]

## Inversas

**35** Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ . Calcule la matriz inversa de  $A$ . [Con resultado]

**36** Dados dos números  $x$  e  $y$ , no nulos, determine la matriz inversa de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 \\ y & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Calcule la matriz inversa de  $A$ . [Con resultado]

**37** Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden 3 que verifica la ecuación matricial  $A^2 + 2A = I$ , siendo  $I$  la matriz identidad de orden 3. Compruebe que  $A$  es invertible determinando la inversa de  $A$  en función de  $A$ .

**38** Dados dos números  $a$  y  $b$  no nulos, estudie si la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$  tiene matriz inversa. En caso afirmativo calcúlela.

**39** Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$  y la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ . Para que valores de  $\lambda$  la matriz  $A$  no tiene inversa? [Con resultado]

**40** Dados dos números  $a, b$  distintos, determine si la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \end{pmatrix}$  posee inversa en función de  $a$  y  $b$ .

**41** Dada la matriz  $A$ , estudiar la existencia de una matriz  $X$  tal que  $A \times X = I$  y calcularla en caso de que exista.  
 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



# Matrices y sistemas

## 4.1. Sistemas

Cuando el número de incógnitas es igual al número de líneas se puede escribir el sistema con matrices cuadradas.

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Poniendo entonces  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  el sistema se escribe  $AX = B$ .

**Nota 40** Esto, puede ser útil para resolver si ya sabemos que  $A$  es invertible. En este caso tenemos

$$\begin{aligned} (S) &\iff AX = B \\ &\iff A^{-1}AX = A^{-1}B \\ &\iff X = A^{-1}B \end{aligned}$$

y entonces se ve que el sistema es compatible determinado y tenemos la solución  $X$ .

En la siguiente sección, veremos otro método más eficiente para los sistemas 3x3 que encontramos en la selectividad.

Por lo tanto tenemos el teorema:

**Teorema 41**  $\det A \neq 0 \iff$  El sistema es compatible determinado.

## 4.2. Si $\det A \neq 0$ : Regla de Cramer

**Teorema 42** Consideremos el sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Sea  $A_x$  la matriz obtenida sustituyendo la columna de los  $x$  por la columna  $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ . De mismo modo se define  $A_y$  y  $A_z$ .

Si  $\det A \neq 0$ , el sistema es compatible determinado de única solución :  $\left( \frac{\det A_x}{\det A}; \frac{\det A_y}{\det A}; \frac{\det A_z}{\det A} \right)$

**Nota 43** Este método puede ser muy útil para los sistemas de hasta 3 incógnitas. Para 4 incógnitas o más resulta menos adecuado por el elevado número de cálculos que se precisan.

### 4.3. Si $\det A = 0$ : Gauss

Si  $\det A = 0$ , el sistema será incompatible o bien compatible indeterminado. Se usará el método de Gauss.

**Ejemplo 44 (Muy clásico)** Discuta y resuelva, según los valores del parámetro  $a$  el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + ay + 2z = 0 \\ y - z = -1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$  la matriz del sistema.

Desarrollando por primera columna tenemos  $\det(A) = 2 - a^2 - 2a$ .

$\det(A) = 0 \iff a^2 + 2a - 2 = 0$ . Tenemos  $\Delta = 12$ , y entonces  $\det(A) = 0 \iff a = -1 - \sqrt{3}$  o  $a = -1 + \sqrt{3}$ .

**Caso 1 :** Si  $a \notin \{-1 - \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}\}$  entonces  $\det(A) \neq 0$  y el sistema es compatible determinado. Usemos el método de Cramer para hallar la solución.

Tenemos

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } \det(A_x) = -4$$

$$A_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } \det(A_y) = 2a$$

$$A_z = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } \det(A_z) = 2 - a^2$$

Por lo tanto

$$\begin{cases} x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{-4}{2 - 2a - a^2} \\ y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{2a}{2 - 2a - a^2} \\ z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{2 - a^2}{2 - 2a - a^2} \end{cases}$$

**Caso 2 :** Si  $a \in \{-1 - \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}\}$  entonces  $\det A = 0$  y  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$  por lo tanto  $\text{Rango}(A) = 2$ .

Sea  $A' = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  la matriz ampliada del sistema. Buscamos el rango de  $A'$  con el método de Gauss.

$$A' \iff \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 0 \\ a & 2 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} L_2 + L_3$$

Estas líneas son linealmente independientes y por lo tanto  $\text{Rango}(A') = 3$ . Entonces tenemos  $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(A')$  y se deduce que el sistema es incompatible.

## Ejercicios

### Sistemas

**42** Discuta y resuelva, según los valores del parámetro  $a$  el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + ay + 2z = 0 \\ y - z = -1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

[Con resultado]

**43** Resuelva el sistema

$$S_\lambda \equiv \begin{cases} 3\lambda x + 2y + 3z = 1 \\ x - \lambda y - z = 1 \\ x - y - z = \lambda \end{cases}$$

para aquellos valores de  $\lambda$ , que hacen al sistema compatible y determinado.

[Con resultado]

**44** Resuelva dependiendo del valor de  $\lambda$ , el siguiente sistema

$$S_\lambda \equiv \begin{cases} 2\lambda x + 2y + 3\lambda z = 1 \\ \lambda x - \lambda y - z = 2 \\ x - y - z = \lambda \end{cases}$$

[Con resultado]

**45** Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 2x + 5y + 4z = -2 \\ x + 3y + a^2z = a^2 \end{cases}$$

Determine la solución en función de  $a \in \mathbb{R}$  en el caso de que sea compatible y determinado.

[Con resultado]

**46** Estudie si el sistema  $S_\lambda$  posee solución, dependiendo del valor de  $\lambda$ ,

$$S_\lambda \equiv \begin{cases} \lambda x + 2y + \lambda z = 2 \\ \lambda x - \lambda y - z = 1 \\ \lambda x - y - z = \lambda \end{cases}$$

[Con resultado]

**47** Discuta y resuelva, dependiendo del valor  $a$  el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -x - 2z - 2ay = 0 \\ 2y - 2z = -2 \\ y - z - ax = -1 \end{cases}$$

[Con resultado]

**48** Resuelva, dependiendo del valor de  $\lambda$  el siguiente sistema

$$S_\lambda \equiv \begin{cases} 2y + 2x\lambda + 3z\lambda = 1 \\ x\lambda - z - y\lambda = 2 \\ x - y - z = \lambda \end{cases}$$

[Con resultado]

**Varios****49** Se consideran las matrices  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ , y  $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ . Hállese una matriz  $X$  que sea solución de la ecuación matricial  $AXA^{-1} = C$ 

[Con resultado]

**50** Estudie la existencia de una matriz  $A$  tal que  $A \times A = I$ , y calcúlela en caso afirmativo.Observación :  $A \times A$  representa el producto de matrices.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ donde } a + d \neq 0 \text{ y } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ..$$

[Con resultado]

**51** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & b & 0 \\ 2 & 0 & -a \end{pmatrix}$  donde  $a$  y  $b$  son números no nulos, determine la matriz  $A^4$ .**52** Estudie si existe alguna matriz  $X$  tal que  $A \times X \times B = C$  y en caso afirmativo calcúlela.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**53** Se consideran las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ . Hállese una matriz  $X$  que sea solución de la ecuación matricial  $AXA^{-1} = C$ .

[Con resultado]



# Rango

## 5.1. Espacios vectoriales

**Definición 45**  $(E, +, \cdot)$  es un espacio vectorial (sobre  $\mathbb{R}$ ) si se pueden sumar dos elementos de  $E$ , si existe un elemento neutro y si para cada  $a \in \mathbb{R}$  y  $v \in E$  se puede calcular  $a \cdot v$ . También se necesitan reglas de cálculo de conmutatividad, distributividad ...

**Ejemplo 46** Los  $n$ -uplas de  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  forman un espacio vectorial. Se notan  $\vec{v}(a_1; \dots a_n)$  y se ve claramente que se pueden sumar o multiplicar por un número real.

**Definición 47** Sea  $E$  un espacio vectorial;  $\vec{v}_1; \dots; \vec{v}_n$   $n$  vectores de  $E$ ;  $\lambda_1; \dots \lambda_n$  números reales.

1. El vector  $\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$  es una combinación lineal de  $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n$ .
2. Un conjunto  $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n$  de elementos de  $E$  se llama linealmente dependiente (LD) si se puede expresar alguno de ellos como combinación lineal de los demás. Si no es el caso entonces el conjunto se llama linealmente independiente (LI).

**Ejemplo 48** 1.  $u = (3, 5)$  y  $v = (9, 6)$  son linealmente independientes puesto que no son proporcionales.

2.  $u = (3, 5)$  y  $v = (9, 15)$  son linealmente dependientes puesto que son proporcionales:  $v = 3 \cdot u$

3.  $(1; 2; 3) + 2(4; 6; 7) = (9; 14; 17)$  por lo tanto  $(9; 14; 17)$  es una combinación lineal de las ternas  $(1, 2, 3), (4; 6; 7)$ .

4.  $(1; 0; 0); (0; 1; 0); (0; 0; 1)$  son L.I

5.  $(1; 0; 0); (0; 1; 0); (0; 0; 1); (1; 3; 2)$  son L.D pues  $(1; 3; 2) = (1; 0; 0) + 3 \cdot (0; 1; 0) + 2 \cdot (0; 0; 1)$ .

**Teorema 49** Si  $\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$  entonces  $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n$  es L.I.

## 5.2. Rango

**Teorema 50** En una matriz, el número de filas L.I es igual al número de columnas L.I y llamamos este número el rango de la matriz.

**Nota 51** • Si miramos las columnas (o filas) como vectores, entonces el rango sería el « tamaño » del espacio generado por estos vectores. (espacios de 2,3,4 dimensiones...)

- Tenemos entonces  $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^t)$
- Para decirlo de manera más sencilla, el rango de un conjunto de vectores es el tamaño del espacio que generan esos vectores.

**Teorema 52** Sea  $A$  una matriz cuadrada de tamaño  $n$ ,  $\det(A) = 0 \iff$  las columnas son L.D y por lo tanto :

$$\det(A) = 0 \iff \text{Rango}(A) < n$$

$$\det(A) \neq 0 \iff \text{Rango}(A) = n = \text{tamaño de } A$$

Para calcular el rango de una matriz usaremos en la mayoría de los casos el resultado siguiente:

**Teorema 53** Se puede conocer el rango de una matriz usando las transformaciones de Gauss (no cambian el rango) hasta llegar a una matriz triangular. Entonces el rango sera el número de filas distintas de  $(0; 0; \dots; 0)$ .

**Ejemplo 54** Hallar el rango de la matriz  $A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ .

Usemos las transformaciones de Gauss para hallar el rango de  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -8 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 - L_3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_2 \\ \\ \end{matrix}$$

Como esta ultima matriz es escalonada, se deduce que el rango de  $A$  es el número de filas no nulas es decir  $\text{Rango}(A) = 2$ .

### 5.2.1. Calcular el rango con los menores

**Definición 55** Si en una matriz cualquiera seleccionamos  $r$  filas y  $r$  columnas entonces tenemos una submatriz cuadrada de orden  $r$ . Su determinante es un **menor de orden**  $r$ .

**Teorema 56** El rango de una matriz es el máximo orden de sus menores no nulos.

**Ejemplo 57**  $\begin{vmatrix} -2 & 8 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$  pero  $\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$  por lo tanto  $\text{Rango} \begin{pmatrix} -2 & 8 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} = 2$

## 5.3. Resolución de sistemas

Sea el sistema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Sea  $A$  la matriz del sistema  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  y  $A'$  la matriz ampliada:  $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$

**Teorema 58 (Rouché)**  $A$  la matriz del sistema y  $A'$  la matriz ampliada.

1.  $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A')$  si y solo si el sistema es compatible.
2.  $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A')$  con  $\text{Rango}(A) < n$  entonces el sistema es compatible indeterminado.
3.  $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A')$  con  $\text{Rango}(A) = n$  entonces el sistema es compatible determinado.
4.  $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(A')$  si y solo si el sistema es incompatible.

**Nota 59**  $A$  cuadrada con  $\det(A) \neq 0$  si y solo si el sistema es compatible determinado.

## Ejercicios

**54** Calcula el rango de las matrices siguientes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \quad \left| \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \right| \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 14 & 4 \\ -6 & -9 & -18 & -3 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \left| \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 6 & 3 & -3 \\ 3 & -8 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \right|$$

**55** Calcule el rango de la matriz siguiente para los distintos valores del número real  $t$ .

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & t \\ 4 & -2 & -6 & -8 \\ 2 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

**56** Calcule el rango de la matriz siguiente para los distintos valores del número real  $t$ .

$$A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \left| \quad C = \begin{pmatrix} 3-t & 3 & 2t \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2+t \\ t+2 & 0 & t \end{pmatrix} \right.$$

$$B = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ 2t+1 & 0 & -t-3 \end{pmatrix}$$

**57** Determine el conjunto de números reales  $\alpha$  para los que el rango de la matriz  $A$  es menor que 3.

Observación :  $A^T$  representa la matriz traspuesta de  $A$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 3 & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{[Con resultado]}$$

**58** Estudie el rango de la matriz  $A$  para todos los números reales  $\alpha$  y los números enteros  $n$ .

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & n & \alpha \\ n & \alpha & n+1 \\ \alpha & n+1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{[Con resultado]}$$

**59** Sea  $a \in \mathbb{R}$ . Calcule en función de  $a$ , el rango de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . [Con resultado]

**60** Determine para que números reales  $\alpha$  se verifica que el rango de la matriz  $A^4$  es menor que 3, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 3 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

Nota :  $A^4 = A \times A \times A \times A$

[Con resultado]

**61** Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro.

$$A = \begin{pmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \left| \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \left| \quad C = \begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix} \right.$$

**62** Hallar el rango de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \text{ según } t$$

[Con resultado]

**63** Discutir el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

según los valores de  $a$ .

[Con resultado]

**64** Calcular el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & t & 0 \\ 4 & -6 & 8 & -2 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

según los valores de  $t$ .

[Con resultado]

**65** Hallar el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$$

según los valores de  $a, b, c$ .

[Con resultado]

**66** Dados los números reales  $a, b$  se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{pmatrix}$$

1. Obtenga el determinante de  $A$ .
2. Estudie el rango de  $A$  dependiendo de los valores de  $a$  y  $b$ .

[Con resultado]

**67** Discute, según los valores de  $m$ , el rango de la matriz.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & m & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ m & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

**68** Discute, según los valores de  $m$ , el rango de la matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & m & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

[Con resultado]

**69** Sea el sistema :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -x + my + 2z = 0 \\ 3x + mz = 4 \end{cases}$$

1. Estudie si el sistema posee solución única dependiendo del valor  $m$ .
2. Resuelva el sistema en aquellos casos en los que no sea compatible determinado (utilizando el rango).

[Con resultado]

# Complementos sobre las funciones

## 6.1. Asíntotas

**Definición 60 :**

Una recta  $r$  es asíntota de la gráfica de una función  $y = f(x)$  si al moverse un punto  $P(x; y)$  de la gráfica sobre ésta, de forma que  $x \rightarrow \infty$  o  $y \rightarrow \infty$ , la distancia del punto  $P$  a la recta  $r$  tiende a cero.

### 6.1.1. Asíntotas verticales

**Definición 61 :**

La recta  $x = a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) es **asíntota vertical** de la gráfica de una función  $f$  si : al menos uno de los límites laterales de  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow a$  es  $+\infty$  o  $-\infty$

### 6.1.2. Asíntotas horizontales

**Definición 62 :**

La recta  $y = \ell$  ( $\ell \in \mathbb{R}$ ) es **asíntota horizontal** de la gráfica de una función  $f$  si se cumple que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \text{ o } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$$

### 6.1.3. Asíntotas oblicuas

Este teorema nos explica como encontrar una asíntota oblicua.

**Teorema 63** Sea  $f$  una función,  $\mathcal{C}$  la gráfica de  $f$  y  $a \neq 0$ .

$f$  tiene una asíntota oblicua de ecuación  $y = ax + b$  en  $+\infty$  si y solo si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ .

Este teorema es válido también en  $-\infty$ .

**Nota 64** Entonces se calcula  $b$  de la manera siguiente :  $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$

## 6.2. $\sqrt[n]{x}$ , $n \in \mathbb{N}^*$

En Francia está definida sobre  $\mathbb{R}_+$  tenemos  $\sqrt[n]{x} = \begin{cases} x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln x} & \text{cuando } x > 0 \\ 0 & \text{cuando } x = 0 \end{cases}$

En España está definida de manera diferente:

- Cuando  $n$  es par, se define igual que en Francia.

- Cuando  $n$  es impar, es la función recíproca de  $x^n$  definida sobre  $\mathbb{R}$ , es decir  $\sqrt[n]{x} = \begin{cases} x^{\frac{1}{n}} & \text{cuando } x > 0 \\ 0 & \text{cuando } x = 0 \\ -|x|^{\frac{1}{n}} & \text{cuando } x < 0 \end{cases}$

**Ejemplo 65**  $\sqrt[3]{-8} = -2$

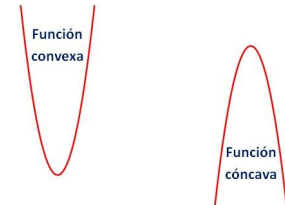
### 6.3. Triángulo de Pascal

$n = 0:$		1				$(a + b)^0 = 1$
$n = 1:$		1	1			$(a + b)^1 = a + b$
$n = 2:$		1	2	1		$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$n = 3:$	1	3	3	1		$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$n = 4:$	1	4	6	4	1	$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

### 6.4. Convexidad y concavidad

**Definición 66**  $f$  una función derivable 2 veces en  $x_0$ .

1.  $f$  es cóncava en  $x_0$  si  $f''(x_0) < 0$
2.  $f$  es convexa en  $x_0$  si  $f''(x_0) > 0$
3.  $f$  tiene un punto de inflexión en  $x_0$  si  $f''(x_0) = 0$  y  $f''$  cambia de signo (entonces cambia de convexidad, es decir pasa de convexa a cóncava o lo contrario. Ver por ejemplo la función cubo en cero).



### 6.5. Receta para estudiar una función

1. Dominio de definición.
2. Simetría (par o impar)
3. Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
4. Derivadas.  
El signo de la derivada da las variaciones de  $f$  y se encuentran los puntos singulares (máximo y mínimo) cuando  $f'(x) = 0$  y  $f'$  cambia de signo.  
La derivada segunda da la concavidad, convexidad y los puntos de inflexión.
5. Tangentes verticales ? (sobre todo si la función lleva raíces cuadradas).
6. Puntos de corte con los ejes.

### 6.6. Continuidad

**Definición 67** Sea  $f$  una función definida en  $I$  y  $a \in I$ .  $f$  es continua en  $a$  si  $\lim_a f = f(a)$ .

**Definición 68**  $f$  es discontinua en  $a$  si no es continua en  $a$ . Existen 3 tipos de discontinuidad:

1.  $f$  tiene una discontinuidad evitable en  $a$  si  $\lim_a f$  existe y finito pero es diferente de  $f(a)$ .
2.  $f$  tiene una discontinuidad de primera especie o de salto si  $\lim_{a^-} f \neq \lim_{a^+} f$  los dos límites tomando valores finitos.
3.  $f$  tiene una discontinuidad de segunda especie si no existe uno de los límites laterales o si es infinito.

### 6.7. Ejemplos de estudios

**Ejemplo 69** Estudie la existencia de rectas asíntotas correspondiente a la gráfica de la función  $f(x) = \frac{\ln x^2}{x + \sqrt[3]{x}}$ .

- Primero el dominio de definición es  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$ .
- Symetria : También para cualquier  $x \in \mathbb{R}^*$  tenemos  $f(-x) = \frac{\ln x^2}{-x - \sqrt[3]{x}} = -f(x)$  y por lo tanto  $f$  es impar. Por lo que es suficiente estudiarla la cuando  $x > 0$ .

- Límites : En  $+\infty$ ,  $x + \sqrt[3]{x}$  es infinito de mayor orden que  $2 \ln(x^2)$  y por lo tanto  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Entonces la recta de ecuación  $y = 0$  es asíntota a la gráfica de  $f$ .
- En  $0$  :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x + \sqrt[3]{x} = 0^+$  y por lo tanto  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ . Se deduce que la recta de ecuación  $x = 0$  es asíntota a  $\mathcal{C}_f$ .
- Finalmente sobre  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$  la recta  $y = 0$  es asíntota en  $-\infty$  y  $+\infty$  y la recta  $x = 0$  es asíntota vertical.

**Ejemplo 70** Represente la gráfica de la función  $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + 1}$ .

- Primero el dominio de definición es  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

• Límites :  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  pues  $x^2$  es infinito de mayor grado que  $x$ .

$\lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 - 2x = -1$  y  $\lim_{x \rightarrow -1^+} x + 1 = 0^+$  por lo tanto  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 - 2x = -1$  y  $\lim_{x \rightarrow -1^-} x + 1 = 0^-$  por lo tanto  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$

Entonces  $x = -1$  es asíntota vertical.

- Asíntota oblicua : tenemos una fracción racional y el grado del polinomio de arriba es uno más que el grado del polinomio de abajo por lo tanto tenemos una asíntota oblicua. Haremos la división euclidiana de los polinomios :

$$\begin{array}{r|l} X^2 & - & 2X \\ -(X^2 & + & X) \\ \hline & -3X & \\ & -(-3X & - 3) \\ \hline & & 3 \end{array}$$

Por lo tanto  $f(x) = x - 3 + \frac{3}{x + 1}$ .

Entonces  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (x - 3) = 0$  y se deduce que la recta  $d \equiv y = x - 3$  es asíntota oblicua a la gráfica de  $f$ .

- Variaciones :  $f$  es derivable y

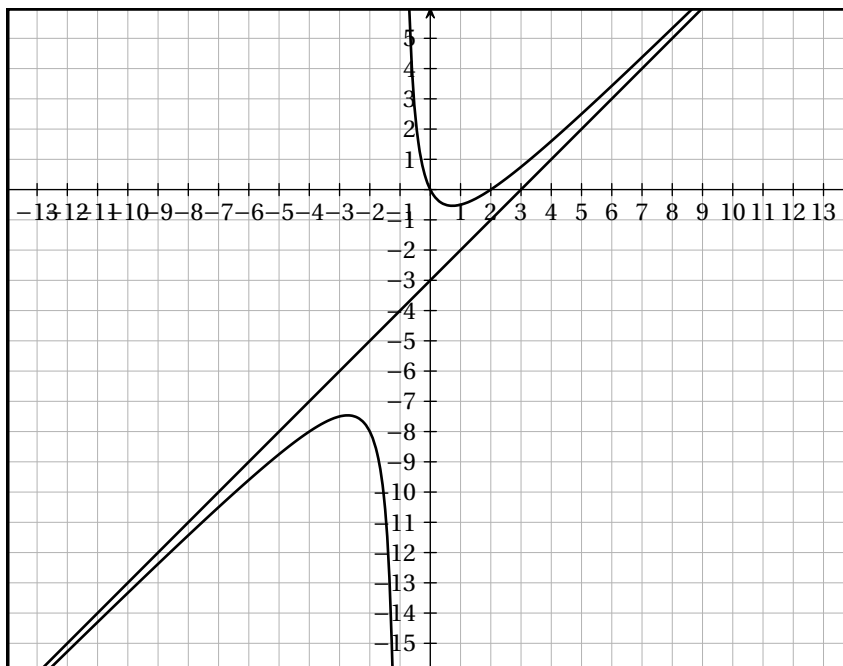
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x + 1)(2x - 2) - (x^2 - 2x)}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 2}{(x + 1)^2} \end{aligned}$$

Sea  $P(x) = x^2 + 2x - 2$  el numerador.

$\Delta = 12$ , por lo tanto  $P$  tiene dos raíces :  $x_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}$  y  $x_2 = -1 - \sqrt{3}$ .

Se deduce el signo de  $f'$  y las variaciones de  $f$ .

$x$	$-\infty$	$-(\sqrt{3}) - 1$	$-1$	$\sqrt{3} - 1$	$+\infty$
Variations de $f$	$-\infty$	$-2\sqrt{3} - 4$	$-\infty$	$2\sqrt{3} - 4$	$+\infty$



## Ejercicios

### 6.7.1. Para practicar

**70** Hallar el valor del límite al punto indicado :

$$f_1(x) = \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^2 + x - 6} \text{ en } a = 2.$$

$$f_2(x) = \frac{x - 3}{\sqrt{19 - x} - 4} \text{ en } a = 3.$$

$$f_3(x) = \left( \frac{2}{\sqrt{x+1}} - 2 \right) \frac{1}{x} \text{ en } a = 0.$$

$$f_4(x) = \left( \frac{2x+1}{2x-3} \right)^{x+2} \text{ en } a = +\infty.$$

$$f_5(x) = \frac{\text{sen}(3x)}{x} \text{ en } a = 0.$$

$$f_6(x) = \frac{x^p - 1}{x^q - 1} \text{ en } a = 1 \text{ siendo } p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

$$f_7(x) = \left( \frac{x+4}{x-1} \right)^{x+4} \text{ en } a = +\infty.$$

$$f_8(x) = x \text{ sen}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ en } a = +\infty.$$

$$f_9(x) = \sqrt{x+6} - \sqrt{x-6} \text{ en } a = +\infty.$$

$$f_{10}(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \text{ en } a = 9.$$

$$f_{11}(x) = \frac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x} \text{ en } +\infty.$$

$$f_{12}(x) = \frac{\text{tg}(5x)}{\text{sen}(x)} \text{ en } a = 0.$$

**71** Halla el valor del parámetro  $k$  para que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x - 5}{kx^2 - 8x + 1} = 6$$

**72** Hallar la derivada de las funciones siguientes :

$$f_1(x) = \cos^3(x^3)$$

$$f_2(x) = \ln x^2.$$

$$f_3(x) = e^x \text{ tg}(6x).$$

$$f_4(x) = 3x^4 \ln(x^2 + x)^3.$$

$$f_5(x) = e^{\text{tg}(x)}.$$

$$f_6(x) = 3 \text{ sen}(5x^3 - 3x^2).$$

$$f_7(x) = \sqrt[3]{(\ln x^5)^7}.$$

### 6.7.2. Polinomios

**73** Estudie y dibuje la gráfica de la función

$$f(x) = x^5 - 8x^2$$

[Con resultado]

**74** Estudie y dibuje la gráfica de la función

$$f(x) = -x^4 + 4x^2$$

**75** Estudie y dibuje la gráfica de la función  $f(x) = 3x^7 - 8x^4$

### 6.7.3. Racionales

**76** Estudie las asíntotas de la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 3x + 2}$$

**77** Represente la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$$

**78** Represente la gráfica de la función  $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2}$

[Con resultado]

- 79** Estudie el crecimiento y decrecimiento de la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$$

- 80** Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

Estudie el dominio, asíntotas, crecimiento y posibles puntos de máximo y mínimo relativo y haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función.

- 81** Estudie y represente la gráfica de la función  $f(x) = \frac{-1}{x^2 - x}$

- 82** Estudie las asíntotas de la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2}{x^2 - 3x + 2}$$

[Con resultado]

- 83** Estudie y represente la gráfica de la función  $f(x) = \frac{1}{3x - x^2}$

- 84** Estudie las asíntotas de la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$$

**85**

1. Hallar los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$$

2. Determinar una función  $F(x)$  tal que su derivada sea  $f(x)$  y además  $F(0) = 4$ .

- 86** Represente la gráfica de la función  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x}$

- 87** Estudie el crecimiento y decrecimiento de la gráfica de la función  $f(x) = -\frac{1}{9x^5 - x^7}$

**88** Sea la función  $f(x) = \frac{x^6}{x^6 + 5}$ . Estudie el dominio, asíntotas, crecimiento y posibles puntos de máximo y de mínimo relativo y haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función  $f$ .

- 89** Represente la gráfica de la función  $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 1x + 3}{x^2 - 5x + 4}$

[Con resultado]

- 90** Represente la gráfica de la función  $f(x) = \frac{4}{5x - 3x^2}$

#### 6.7.4. Varios

- 91** Estudiar y dibujar la gráfica de  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

- 92** Estudie la existencia de rectas asíntotas correspondiente a la gráfica de la función.

$$f(x) = \frac{\ln x^2}{x + \sqrt[3]{x}}$$

- 93** Estudie la gráfica de la función  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ . Observación :  $\ln x$  es el logaritmo neperiano de  $x$ .

**94** Sea la función  $f(x) = e^x(x - 2)$ . Estudie el dominio, asíntotas, crecimiento, posibles extremos relativos, convexidad y posibles puntos de inflexión de la función  $f$ . Haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función. [Con resultado]

- 95** Represente la gráfica de la función  $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$ .

[Con resultado]

- 96** Sea la función

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$$

Estudie el dominio, asíntotas, crecimiento y posibles puntos de máximo y mínimo relativo y haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función.

**97** Represente la gráfica de la función  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x - x^2}}$

**98** Dibujar la gráfica de la función  $f(x) = \frac{|x|}{2 - x}$  indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

**99** Represente la gráfica de la función  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$

**100** Sea la función  $f(x) = e^x(9x - 8)$ . Estudie el dominio, asíntotas, crecimiento, posibles extremos relativos, convexidad y posibles puntos de inflexión de la función  $f$ . Haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función  $f$

**101** Estudie la existencia de rectas asíntotas correspondientes a la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{\ln x^4}{2x + \sqrt[3]{x}}. \text{ Observación : } \ln x \text{ es el logaritmo neperiano de } x.$$

**102** Se considera la función  $f(x) = \frac{\ln 7x}{x}$ . Estudie el dominio, asíntotas, crecimiento, posibles puntos máximo y mínimo relativo y haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función  $f$ .

Nota :  $\ln x$  designa el logaritmo neperiano de  $x$ .

**103** Represente la gráfica de la función  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2x - x^2}}$

**104** Sea  $f(x) = \frac{7}{x} + \ln 3x$ . Realice un estudio de  $f$  y haga un dibujo aproximado de su gráfica. Nota :  $\ln x$  designa el logaritmo neperiano de  $x$ .

**105** Estudie la existencia de rectas asíntotas a la gráfica de la función  $f(x) = \frac{\ln x^2}{5x + \sqrt[5]{x}}$ .

Observación :  $\ln x$  es el logaritmo neperiano de  $x$ .

**106** Estudie la gráfica de la función  $f(x) = \ln x^2 + 4$ . Observación :  $\ln x$  es el logaritmo neperiano de  $x$ .

**107** Estudie la gráfica de la función  $f(x) = \ln(2x^2 + 2)$ . Observación :  $\ln x$  es el logaritmo neperiano de  $x$ .

**108** Represente, aproximadamente, la gráfica de la función  $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2 - \cos x}$  en el intervalo  $[-\pi; \pi]$  haciendo uso del estudio del crecimiento y extremos relativos de  $f$ .

### Continuidad y derivabilidad

**109** Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x < -1 \\ a - 2x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{b}{x} & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

determine los valores de  $a$  y  $b$  para que  $f$  sea continua en toda la recta real.

Una vez determinados los valores de  $a$  y  $b$  en el apartado anterior, estudie la derivabilidad de  $f$ .

**110** Se considera la función real de variable real definida por :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

1. Estudiar su continuidad y derivabilidad

2. Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(3, 1)$ .

**111** Sea  $f(x)$  una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos puntos y tal que :

$$f(0) = 1; \quad f(1) = 2; \quad f'(0) = 3; \quad f'(1) = 4$$

Se pide :

1. Calcular  $g'(0)$ , siendo  $g(x) = f(x + f(0))$

2. Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$

**112** Sea  $g(x)$  una función continua y derivable para todo valor real de  $x$ , de la que se conoce la siguiente información:

- i)  $g'(x) > 0$  para todo  $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$  mientras que  $g'(x) < 0$  para todo  $x \in (0, 2)$ .
- ii)  $g''(x) > 0$  para todo  $x \in (1, 3)$  y  $g''(x) < 0$  para todo  $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
- iii)  $g(-1) = 0$ ,  $g(0) = 2$ ,  $g(2) = 1$ .
- iv)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$

Teniendo en cuenta los datos anteriores, se pide:

1. Analizar razonadamente la posible existencia o no existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.
2. Dibujar de manera esquemática la gráfica de la función  $g(x)$ .

**113** Se considera la función  $f(x) = x^2 + m$  donde  $m > 0$  es una constante.

1. Para cada valor de  $m$  hallar el valor  $a > 0$  tal que la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(a, f(a))$  pase por el origen de coordenadas.
2. Hallar el valor de  $m$  para que la recta  $y = x$  sea tangente a la gráfica de  $f(x)$ .

**114** Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < -3 \\ p - 2x^2 & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ \frac{q}{x} & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

determine los valores de  $p$  y  $q$  para que  $f$  sea continua en toda la recta real.

Una vez determinados los valores de  $p$  y  $q$  en el apartado anterior, estudie la derivabilidad de  $f$ .

[Con resultado]

**115** Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{\sin(\pi x)}, \quad x \in ]0, 1[$$

Definir  $f(0)$  y  $f(1)$  de forma que  $f$  sea continua en todo el intervalo cerrado  $[0, 1]$ .

**116** Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 5, & \text{si } x = 0 \\ 5 - \frac{|x|}{x}, & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

**117** Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 2 \\ \frac{x - 2}{1 + e^{\frac{1}{x-2}}}, & \text{si } x \neq 2 \end{cases}$$

en el punto  $x_0 = 2$ .

**118** Consideremos la función:

$$f(x) = |x^2 - 4|$$

1. Razonar en qué puntos es derivable y en cuáles no lo es.
2. Estudiar la existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos.
3. Representar gráficamente la función.

**119** Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola  $y = x^2 - 4x + 3$  en el punto  $x_0 = 4$ .

**120** Hallar el valor de  $a$  para que la curva  $y = 2x^3 - 3x^2 + a$  y la recta  $y = 12x - 1$  sean tangentes. ¿Cuál es el punto de tangencia?.

**121** Hallar la pendiente de la curva:

$$y = \frac{x + 1}{x^2 + 5x - 6}$$

en su punto de corte con el eje de ordenadas.

**122** Siendo  $\ln x$  el logaritmo neperiano de  $x$ , calcular

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

**123** Selectividad Septiembre 2000. Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg}(x^2)}$$

**124** Selectividad Septiembre 2003. Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \operatorname{sen} x}{x \cdot \operatorname{sen} x}$$

siendo  $\ln(1+x)$  el logaritmo neperiano de  $1+x$ .

**125** Selectividad junio 2009. Calcular el siguiente límite ( $\ln$  denota logaritmo neperiano):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x^2 - 1} \right)$$

**126** Estudiar la convexidad y concavidad de la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

**127** Se considera una ventana rectangular en la que el lado superior ha sido sustituido por un triángulo equilátero tal y como se indica en la figura. Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 6'6 m., hallar sus dimensiones para que su superficie sea máxima.



**128** Selectividad Junio 2002. Consideremos la función definida por

$$f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$$

1. Calcular las asíntotas de la gráfica de  $f$ .
2. Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos de  $f$  (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).
3. Con los datos obtenidos, esbozar la gráfica de  $f$ .

**129** Selectividad junio 2008. Sea  $f$  la función definida para  $x > 0$  por

$$f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$$

Determinar las asíntotas de la gráfica de  $f$ .

**130** Selectividad septiembre 2009. Se considera la función  $f: [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$$

Determinar la asíntota de la gráfica de  $f$ .

**131** Selectividad junio 2010. Sea  $f$  la función definida como

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{a - x}, \quad \text{para } x \neq a$$

1. Calcular  $a$  y  $b$  para que la gráfica de  $f$  pase por el punto  $(2, 3)$  y tenga una asíntota oblicua con pendiente  $-4$ .
2. Para el caso  $a = 2$ ,  $b = 3$ , obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 1$ .

# Integración

## 7.1. Primitivas importantes

Función	Primitiva
$u'u^n; \quad n \neq -1$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + K$
$\frac{u'}{u}$	$\ln  u  + K$
$u'e^u$	$e^u + K$
$u'(1 + \operatorname{tg}^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$	$\operatorname{tg} u + K$
$u' \operatorname{sen} u$	$-\cos u + K$
$u' \cos u$	$\operatorname{sen} u + K$
$\frac{u'}{1 + u^2}$	$\operatorname{arc} \operatorname{tg} u + K$

## 7.2. Notaciones

**Definición 71** Sea  $f$  una función continua.

1. La notación  $\int f(x) dx$  se usa para la primitiva de  $f$ .
2.  $\int_a^b f(x) dx = [F]_a^b = F(b) - F(a)$  donde  $F$  es una primitiva de  $f$ .

## 7.3. Integración por partes

**Teorema 72** Sean  $u, v$  funciones derivables en  $[a; b]$  y  $u', v'$  continuas en  $[a; b]$ . Entonces

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

**Ejemplo 73** Calcule  $\int x^2 \operatorname{sen} x dx$ .

Integramos por parte dos veces :

Sea  $u = x^2; u' = 2x; v' = \operatorname{sen} x; v = -\cos x$  entonces  $\int x^2 \operatorname{sen} x dx = [-x^2 \cos x] + \underbrace{\int 2x \cos x dx}_J$ .

Ponemos  $w = 2x; w' = 2; t' = \cos x; t = \sin x$  entonces  $J = [2x \sin x] - \int 2 \sin x dx = 2x \sin x + 2 \cos x$ .

Por lo tanto  $\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$  donde  $C$  es una constante.

## 7.4. Integrales de tipo $\int P(x)e^{ax} dx, \int P(x) \sin ax dx, \int P(x) \cos ax dx$

Se calculan estas integrales por partes tantas veces como el grado del polinomio  $P$  poniendo cada vez  $u' = e^{ax}$  o  $u' = \sin ax$  o  $u' = \cos ax$  y bajando el grado del polinomio.

## 7.5. Integrales de tipo $\int \cos xe^{ax} dx$ o $\int \sin xe^{ax} dx$

Se calculan estas integrales dos veces por partes poniendo cada vez  $u' = e^{ax}$ .

## 7.6. Integrales de tipo $\int P(x) \ln x dx$

Se calculan estas integrales por partes poniendo  $u = \ln x$ .

## 7.7. Integral de fracciones racionales

Sea  $R$  una fracción racional:  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  definida sobre un dominio  $\mathcal{D}$ , con  $P, Q$  polinomios. Suponemos además que el grado de  $P$  es menor que el de  $Q$ . Si no es el caso hay que hacer la división polinómica entre  $P$  y  $Q$  para llegar a este caso. Veremos sobre ejemplos concretos cómo se descompone una fracción de este tipo para que luego se pueda calcular la primitiva.

**Ejemplo 74** División de dos polinomios: Calculemos  $X^3 + X + 1$  dividido por  $X + 1$ . Se pone la división,

$$\begin{array}{r|l} X^3 + & X + 1 \\ -(X^3 + & X^2) & \\ \hline & -X^2 + X \\ & -(-X^2 - & X) & \\ \hline & & 2X + 1 \\ & -(2X + & 2) & \\ \hline & & & -1 \end{array}$$

Entonces tenemos  $X^3 + X + 1 = (X + 1)(X^2 - X + 2) - 1$ .

**Ejemplo 75**

1.  $Q$  es un producto de polinomios de grado uno únicamente:  $R(x) = \frac{x-5}{(x-1)(x+2)}$ . Entonces  $R$  tiene una descomposición de la forma siguiente:

$$R(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}; \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

2.  $Q$  es un producto de polinomios de grado uno únicamente con raíces múltiples:  $R(x) = \frac{2x^2-5}{(x-1)^2x}$ . Entonces  $R$  tiene una descomposición de la forma siguiente:

$$R(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x}; \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}$$

3.  $Q$  es un producto de polinomios de grado uno o dos con discriminante menor que cero:  $R(x) = \frac{2x^2}{\underbrace{(x^2+3x+4)}_{\Delta < 0}(x+1)}$ . Entonces  $R$  tiene una

descomposición de la forma siguiente:

$$R(x) = \frac{ax+b}{x^2+3x+4} + \frac{c}{x+1}; \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}$$

## 7.8. Integración por cambio de variable (o sustitución)

**Teorema 76** Sea  $f$  continua,  $u$  derivable sobre  $[a; b]$  (que sea inyectiva) entonces

$$\int_a^b u'(t)f(u(t)) dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x) dx$$

**Nota 77** Muchas veces usamos este teorema casi sin darnos cuenta. Por ejemplo cuando decimos directamente que la primitiva de  $2x \cos(x^2)$  es  $\sin(x^2)$ .

**Ejemplo 78** Calcular  $I = \int \frac{5}{1 + \sqrt{e^{-x}}} dx$  haciendo el cambio  $t^2 = e^{-x}$ .

Ponemos  $t^2 = e^{-x}$  entonces  $-x = \ln(t^2)$  y por lo tanto  $\frac{-dx}{dt} = \frac{2t}{t^2}$  entonces  $dx = -\frac{2}{t} dt$ .

Tenemos ahora  $I = \int \frac{5}{1+t} \left(-\frac{2}{t}\right) dt = -10 \int \frac{1}{(1+t)t} dt$

Por otra parte  $\frac{1}{(1+t)t} = \frac{-1}{t+1} + \frac{1}{t}$ .

Se deduce

$$I = 10 \ln(|t+1|) - 10 \ln|t| + C = 10 \ln(e^{-x/2} + 1) - 10 \ln(e^{-x/2}) + C = 10 \ln(e^{x/2} + 1) + C$$

**Ejemplo 79** Calcule  $\int \frac{6x^2 - 1}{8x^2 + 2} dx$ . Sea  $R(x) = \frac{6x^2 - 1}{8x^2 + 2}$ .

$$\begin{array}{r|l} 6X^2 & - & 1 & 8X^2 + 2 \\ 6X^2 & + & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ \hline & & - & \frac{5}{2} \end{array}$$

Entonces

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{3}{4} - \frac{5}{2} \times \frac{1}{8x^2 + 2} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{5}{4} \times \frac{1}{(2x)^2 + 1} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{5}{8} \times \frac{2}{(2x)^2 + 1} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^2 - 1}{8x^2 + 2} dx &= \int \frac{3}{4} dx - \frac{5}{8} \int \underbrace{\frac{2}{(2x)^2 + 1}}_{\frac{u'}{1+u^2}} dx \\ &= \frac{3}{4}x - \frac{5}{8} \arctan(2x) + K \end{aligned}$$

**Ejemplo 80** Calcule la integral  $I = \int \frac{2x+1}{x^2+4x+8} dx$

Tenemos  $\text{grado}(2x+1) < \text{grado}(x^2+4x+8)$  por lo tanto se tiene que calcular descomponiendo en fracciones simples.

Aquí  $x^2+4x+8$  tiene  $\Delta < 0$ , por lo tanto no tiene raíces.

Entonces el método es :

$$R(x) = \frac{2x+1}{x^2+4x+8} = \frac{2x+4}{x^2+4x+8} - \frac{3}{x^2+4x+8}$$

La primitiva de la primera función es fácil y la segunda :

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{3}{x^2+4x+8} dx \\ &= 3 \int \frac{1}{(x+2)^2+4} dx \\ &= 3 \int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+4} dx \end{aligned}$$

## Ejercicios

### 7.8.1. La básico :

**132** hallar usando las formulas básicas.

$$\begin{array}{l} \int \frac{x^2 - 3x + 6}{3} dx \\ \int \frac{2}{x^2} dx \\ \int \frac{3}{\sqrt{2x+1}} dx \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \int (3x-7)^5 dx \\ \int x(7x^2+9)^5 dx \\ \int \frac{5}{(2x-4)^6} dx \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \int \frac{4x-2}{(x^2-x+3)^3} dx \\ \int \sin x \cos x dx \\ \int \tan^2 x dx \end{array} \right.$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx \quad \left| \quad \int \frac{2}{5x^2 + 4} dx \right.$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx \quad \left| \quad \int \frac{1}{\cos^2(2x)} dx \right.$$

### 7.8.2. Con astucia

**133** Calcule  $\int (2x^2 + 4x + 2)^3 dx$ . [Con resultado]

### 7.8.3. Por partes

**134** Calcule  $\int x^2 \sin x dx$ . [Con resultado]

### 7.8.4. Con arc tg

**135** Calcule  $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$ . [Con resultado]

### 7.8.5. Con trigonometria

**136** Calcule  $\int \sin^2 x dx$ . [Con resultado]

### 7.8.6. Con descomposición

**137** Calcule  $\int \frac{5x - 1}{x^2 - 1} dx$ . [Con resultado]

**138** Calcule la integral  $I = \int \frac{2x + 1}{x^2 + 4x + 8} dx$  [Con resultado]

### 7.8.7. Área

**139** Calcule el área de la región del plano delimitada por las gráficas de las funciones siguientes:  $f(x) = x^3 - x$  y  $g(x) = x^2 - 1$  definidas en el intervalo  $[-1; 1]$ . [Con resultado]

### 7.8.8. Con cambio de variable

**140** Calcule  $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1 + 2x}} dx$  mediante el cambio de variable  $t^3 = 1 + 2x$ .

### 7.8.9. Miscellaneous

**141** Calcule  $\int e^x \cos x dx$ . [Con resultado]

**142** Calcule  $\int \cos^2 x dx$ . [Con resultado]

**143** Calcule  $\int \frac{2x^2 + 1}{x^3 + x} dx$ . [Con resultado]

**144** Calcule  $\int \frac{2}{9 + 16x^2} dx$ . [Con resultado]

**145** Calcule  $\int \frac{x^2}{4x^2 + 1} dx$ . [Con resultado]

**146** Calcule  $\int_1^e \ln x dx$ . [Con resultado]

**147** Calcule  $\int x \operatorname{tg}^2(x^2) dx$ . [Con resultado]

**148** Calcule  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x dx$ . [Con resultado]

**149** Calcule  $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x} dx$ .

**150** Calcule  $\int_1^e \ln^2 x dx$ . [Con resultado]

**151** Calcule  $\int \cos^3 x dx$ . [Con resultado]

**152** Calcule  $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ . [Con resultado]

**153** Calcule  $\int_1^e \ln x^4 dx$ .

**154** Calcule la integral de la función  $f(x) = \sin^3(2x)$  en el intervalo  $[-\pi; \pi]$ .

**155** Calcule la función primitiva de la función  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{4x^2 + 1}$ . [Con resultado]

**156** Calcule la función primitiva de la función  $f(x) = \ln(x + 1)$ . [Con resultado]

**157** Calcule  $\int \frac{6x^2 - 1}{8x^2 + 2} dx$ . [Con resultado]

**158** Calcule  $\int \frac{2^x}{2^{2x} + 2} dx$ . [Con resultado]

**159** Calcule el área de la región del plano delimitada por las gráficas de las funciones siguientes:  $f(x) = \cos x$  y  $g(x) = \sin x$  definidas en el intervalo  $[-\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}]$ . [Con resultado]

**160** Calcule el área de la región del plano delimitada por las gráficas de las funciones siguientes:  $f(x) = \cos x$  y  $g(x) = \sin x$  definidas en el intervalo  $[0; \frac{3\pi}{4}]$ .

**161** Calcule  $\int_0^1 (x^2 + 1)^5 dx$ . [Con resultado]

**162** Calcule el área de la región del plano delimitada por las gráficas de la función  $f(x) = x^3 - x$  y el intervalo  $[-1; 1]$  del eje OX. [Con resultado]

**163** Calcule  $\int_{-1}^1 (x^2 + 1)^3 (x - 1) dx$ .

**164** Calcule  $\int_{-1}^1 \frac{2x^2 + 1}{x^3 + x} dx$ .

**165** Calcule  $\int x^2 \sin(2x) dx$ . [Con resultado]

**166** Calcule  $\int \frac{-x^2 + 2x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$ .

**167** Calcule  $\int (2x^3 + 4x^2 + 2x)^3 dx$ . [Con resultado]

**168** Calcule  $\int x^2 \operatorname{tg}^2(x^3) dx$ . [Con resultado]

**169** Calcular el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones  $f(x) = \operatorname{sen} x$  y  $g(x) = \operatorname{sen}^2 x$  para  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

**170** Calcule  $\int \frac{1}{25x^2 + 4} dx$ . [Con resultado]

**171** Calcule  $\int x \cos x dx$ .

**172** Calcule  $\int \frac{2x^2 + x + 8}{x^3 + 4x} dx$ . [Con resultado]

**173** Calcule  $\int (x + 4)^2 \cos(x + 3) dx$ .

**174** Calcule  $\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} x \operatorname{tg}^3(x^2) dx$ . [Con resultado]

**175** Calcule  $\int -(x^2 + 3x - 1)^3 dx$ . [Con resultado]

**176** Calcule  $\int (\operatorname{sen}(x) + 1)^2 dx$ . [Con resultado]

**177** Calcule  $\int \frac{2x^2 - x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$ . [Con resultado]

**178** Calcule  $\int e^x \operatorname{sen} x dx$ . [Con resultado]

**179** Calcule  $\int \frac{1}{x + x \ln^2 x} dx$ . [Con resultado]

**180** Calcule  $\int (\cos x + 1)^2 dx$ .

**181** Calcule  $\int_1^e (\ln x^2 + \ln^2 x) dx$ .

**182** Calcule  $\int \frac{3x^2 - 9}{x^3 - 9x} dx$ . [Con resultado]

**183** Calcule  $\int \cos(x) \operatorname{sen}(2x) dx$ . [Con resultado]

**184** Calcule  $\int \frac{2x^2 + 33}{x^2 + 16} dx$ . [Con resultado]

**185** Calcule  $\int -(x^2 + 2x)^3 dx$ . [Con resultado]

**186** Calcule  $\int x^2 \sqrt{1-x} dx$  mediante el cambio de variable  $t = 1 - x$ .



# Vectores en el espacio

## 8.1. Producto vectorial

Sean  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  y  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  dos vectores.

- El producto vectorial de  $\vec{u}$  por  $\vec{v}$ , es el vector  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} y & y' \\ z & z' \\ x & x' \\ x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$ .

2. También se puede calcular usando la técnica siguiente:

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = (yz' - y'z)\vec{i} - (xz' - x'z)\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k}$$

3.  $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| |\sin(\vec{u}; \vec{v})|$

4. El vector  $\vec{w}$  es un vector ortogonal a los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  y su dirección viene dada por los tres primeros dedos de la mano derecha.

5.  $\|\vec{w}\|$  es el área del paralelogramo formado por los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

El área de un triángulo  $ABC$  es entonces  $\mathcal{A} = \frac{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}{2}$ .

## 8.2. Producto mixto

Sean  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$  tres vectores.

1.  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$  es el producto mixto (es un número real).

2.  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$

3. El volumen de un paralelepípedo determinado por  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  es  $\mathcal{V} = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$ .

4. El volumen de un tetraedro determinado por  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  es  $\mathcal{V} = \frac{1}{6} |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$ .

### 8.3. Ecuaciones de recta

$p(p_1; p_2; p_3)$  un punto y  $\vec{d}(d_1; d_2; d_3)$ .  $r$  recta conteniendo un punto  $p$  y  $\vec{d}$  un vector director de  $r$ .

1. La recta  $r$  tiene como ecuación vectorial  $\overrightarrow{OX} = p + \lambda \vec{d}$ .
2. Las ecuaciones paramétricas de  $r$  son

$$r \equiv \begin{cases} x = p_1 + \lambda d_1 \\ y = p_2 + \lambda d_2 \\ z = p_3 + \lambda d_3 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

3. Forma continua  $\lambda = \frac{x - p_1}{d_1} = \frac{y - p_2}{d_2} = \frac{z - p_3}{d_3}$

4. Forma implícita: se dan dos ecuaciones de planos:

$$r \equiv \begin{cases} ax + by + cz + d = 0. \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

**Nota:** Se transforman las ecuaciones implícitas de una recta a las paramétricas escogiendo  $x, y$ , o  $z$  como parámetro.

### 8.4. Ecuaciones de plano

$p(p_1; p_2; p_3)$  un punto y  $\vec{u}(u_1; u_2; u_3)$ ,  $\vec{v}(v_1; v_2; v_3)$ .  $\pi$  plan conteniendo  $p$  y de vectores directores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

1. El plan  $\pi$  tiene como ecuación vectorial  $\overrightarrow{OX} = p + \lambda \vec{u} + \beta \vec{v}$ .
- 2.

$$\pi \equiv \begin{cases} x = p_1 + \lambda u_1 + \beta v_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 + \beta v_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 + \beta v_3 \end{cases} \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

3. Forma implícita: es la forma  $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ . (entonces  $\vec{n}(a; b; c)$  es normal a  $\pi$ ).

### 8.5. Ángulos

1. Entre dos vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , se usa la fórmula  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}; \vec{v})$ .
2. Entre dos planos, se calcula el ángulo entre los dos vectores normales usando la fórmula de antes.
3. Entre una recta y un plano  $\pi$  de vector normal  $\vec{n}$ : sea  $\alpha$  el ángulo entre  $\pi$  y  $r$ ;  $\alpha'$  el ángulo  $\vec{n}$  y  $r$  entonces  $\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2}$ .

### 8.6. Distancias

#### 8.6.1. Punto - Plano

$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ ,  $P(p_1; p_2; p_3)$ .

$$\text{dist}(P, \pi) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

#### 8.6.2. Punto - Recta

$P$  el punto;  $r$  la recta de vector director  $\vec{d}$ .

- **Método 1:** Se toman las ecuaciones paramétricas de  $r$  y un punto  $M$  de  $r$  dependiendo del parámetro  $t$ . Se busca entonces  $M$  tal que  $\overrightarrow{PM}$  y  $\vec{d}$  sean ortogonales. La distancia es entonces  $PM$ .

- **Método 2:** Se toma  $R$  un punto de  $r$  y entonces tenemos la fórmula

$$\text{dist}(P; r) = \frac{\|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$$

### 8.6.3. Recta - Plano (cuando son paralelos)

$r$  una recta,  $\pi$  un plan paralelo a  $r$ . Se toma  $R$  un punto de la recta y entonces  $\text{dist}(r, \pi) = \text{dist}(R; \pi)$ .

### 8.6.4. Plano - Plano (cuando son paralelos)

$\pi_1, \pi_2$  dos planos paralelos. Se toma  $R$  un punto de  $\pi_2$  entonces  $\text{dist}(\pi_1; \pi_2) = \text{dist}(R; \pi_1)$ .

### 8.6.5. Recta - Recta

$r_1; r_2$  dos rectas que se cruzan y de vector director  $\vec{u}_1; \vec{u}_2$ .

- **Método 1:** Se toma  $\pi$  un plano conteniendo la recta  $r_1$  y paralelo a  $r_2$  (un vector normal de este plano sera  $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ ).

Entonces  $\text{dist}(r_1; r_2) = \text{dist}(r_2; \pi) = \text{dist}(P_2; \pi)$  donde  $P_2$  es un punto de  $r_2$ .

- **Método 2:** Se puede usar la fórmula siguiente si la conocéis ...

$P_1 \in r_1$  y  $P_2 \in r_2$  entonces

$$\text{dist}(r_1; r_2) = \frac{\|[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{P_1P_2}]\|}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|}$$

**Ejemplo 81** Determine la ecuación general de un plano que contiene al origen de coordenadas y es perpendicular a los planos  $\pi_1 \equiv x + y - z - 2 = 0$  y  $\pi_2 \equiv x - y + z + 1 = 0$

Sea  $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  y  $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  vectores normales a  $\pi_1$  y  $\pi_2$ .

$\pi$  es ortogonal a  $\pi_1$  y  $\pi_2$  por lo tanto tiene como vector normal el vector  $\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

Entonces  $\pi \equiv -2y - 2z + d = 0$  y  $O \in \pi \implies d = 0$  y por lo tanto (dividiendo entre 2) tenemos  $\pi \equiv y + z = 0$ .

**Ejemplo 82** Determine la distancia entre las rectas  $r_1 \equiv \begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$  y  $r_2 \equiv \begin{cases} 2x + 2y - z - 3 = 0 \\ x - 3y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$ .

Tenemos

$$\text{dist}(r_1; r_2) = \frac{\|[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{P_1P_2}]\|}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|}$$

donde  $P_1 \in r_1, P_2 \in r_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2$  vectores directores de  $r_1$  y  $r_2$ .

- $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$  entonces  $\vec{u}'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  vector director de  $r_1$ .

- $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$ .

- Busquemos un punto de  $r_1$ : si cogemos  $z = 0$  tenemos entonces  $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 1 \\ 2y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$ .

Entonces  $P_1 = (\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 0) \in r_1$ .

- Busquemos un punto de  $r_2$ : si cogemos  $y = 0$  tenemos entonces

$$\begin{cases} 2x - z = 3 \\ x + 3z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 7x = 7 \\ 7z = -7 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Entonces  $P_2 = (1; 0; -1) \in r_2$ .

- Tenemos pues  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}, \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$  entonces

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{P_1P_2}] = \begin{vmatrix} 0 & 3 & \frac{1}{2} \\ 1 & -7 & \frac{3}{2} \\ 1 & -8 & -1 \end{vmatrix} = -3 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -2$$

$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \implies \|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|^2 = 19$  y por lo tanto  $\text{dist}(r_1; r_2) = \frac{2}{\sqrt{19}}$ .

## 8.7. Posiciones relativas de tres planos

Sean los planos  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  y  $\pi_3$  dados por su ecuación general :

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi_2 \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ \pi_3 \equiv A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$$

Para determinar la posición relativa de los tres planos haremos la discusión del sistema formado por sus ecuaciones, utilizando para ello el teorema de Rouché.

La matriz de los coeficientes,  $M$ , y la matriz ampliada,  $M'$ , son :

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{pmatrix}$$

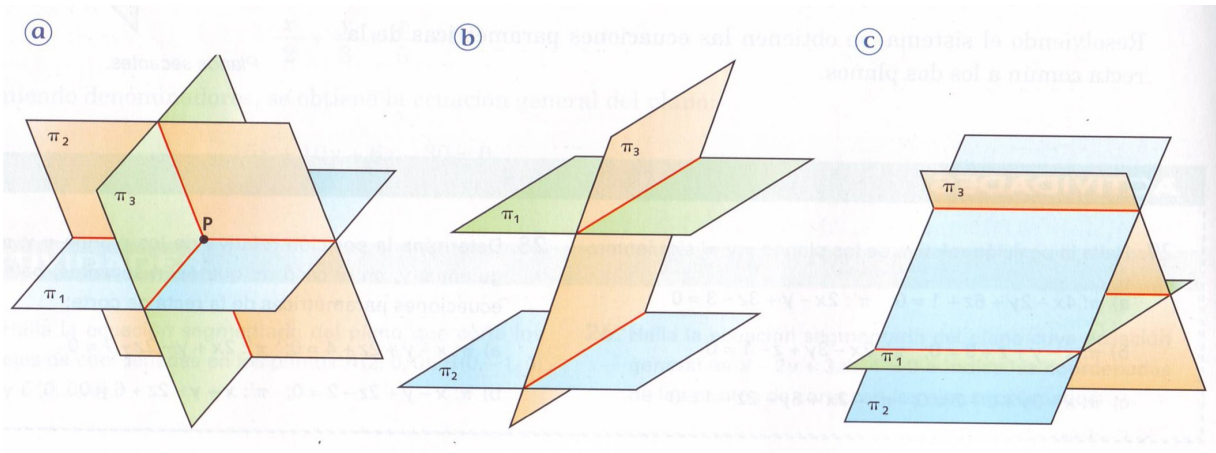
Según sean los rangos de  $M$  y  $M'$  pueden presentarse distintos casos que indicamos a continuación :

**1<sup>er</sup> caso**  $\text{Rango}(M) = \text{Rango}(M') = 3$  Ya que el rango es igual al número de incógnitas, el sistema es compatible determinado : existe una única solución. Así los tres planos se cortan en un punto único dado por la solución del sistema (ver dibujo figura a).

**2<sup>o</sup> caso**  $\text{Rango}(M) = 2$ ,  $\text{Rango}(M') = 3$  El sistema es incompatible : no existe ninguna solución. Así los tres planos no tienen ningún punto que les sea común a la vez, pero sí de dos en dos. Para distinguirlos se estudia si dos filas de la matriz de los coeficientes son proporcionales y la otra no.

- Dos de los planos son paralelos entre sí y el otro es secante a ellos (ver dibujo figura b). Por ejemplo  $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$  y  $\frac{A}{A''} \neq \frac{B}{B''}$

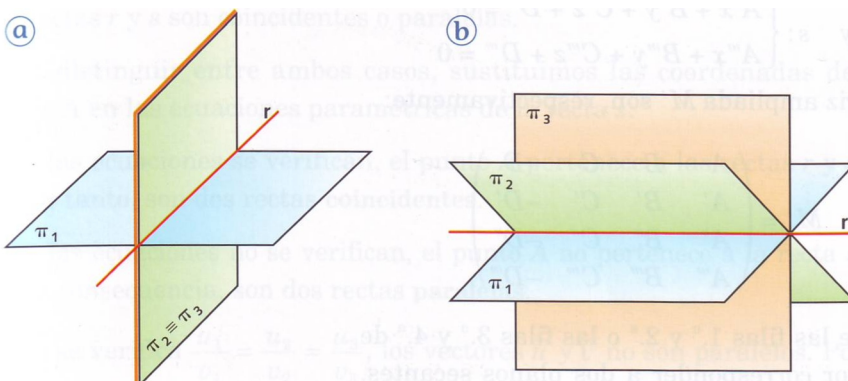
- Los planos se cortan dos a dos según tres rectas paralelas. En este caso, no hay filas proporcionales en la matriz de los coeficientes (ver dibujo figura c).



**3<sup>er</sup> caso**  $\text{Rango}(M) = \text{Rango}(M') = 2$  como el rango es menor que el número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado : hay infinitas soluciones que dependen de un parámetro ( $3-2=1$ ). Así los tres planos tienen una recta en común. Como el rango es 2, hay dos ecuaciones independientes.

- Dos de los planos son secantes y el otro es coincidente con uno de ellos. En este caso, dos filas de la matriz ampliada son proporcionales (ver dibujo figura a).

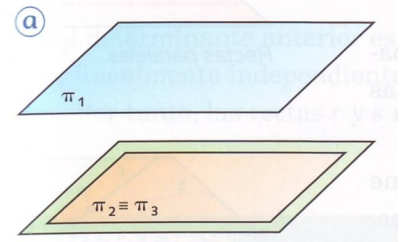
- Los tres planos son secantes y no hay ningún par de planos coincidentes. En este caso, en la matriz ampliada no hay filas proporcionales (ver dibujo figura b).



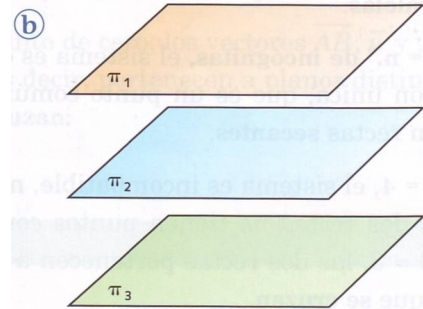
4° caso  $\text{Rango}(M) = 1 \neq \text{Rango}(M') = 2$

El sistema es incompatible. Como  $\text{Rango}(M) = 1$ , los planos son paralelos pero no coinciden los tres ya que  $\text{Rango}(M') = 2$ .

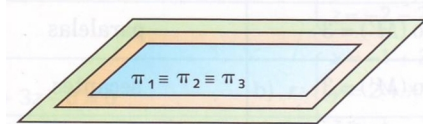
- Si dos filas de la matriz ampliada son proporcionales hay dos planos coincidentes y el otro es paralelo a ellos.



- Si en la matriz ampliada no hay filas proporcionales, los tres planos son paralelos.



5° caso  $\text{Rango}(M) = \text{Rango}(M') = 1$  El rango es menor que el número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado. Las soluciones dependen de 2 parámetros ( $3-1=2$ ). Así los tres planos son coincidentes.



## Ejercicios

### Lo básico para empezar

**187** Hallar la ecuación del plano de  $(ABC)$  con  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(-1; 4; 7)$ ,  $C(3; 1; 4)$ .

**188** Hallar ecuaciones paramétricas de la recta de  $(AB)$  con  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(-1; 4; 7)$ .

**189** Se considera la recta  $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y + 3z + 11 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$

y el plano  $\pi \equiv 3x + 5y - 4z - 1 = 0$ .

1. Comprobar que  $\pi$  y  $r$  se cortan.

2. Hallar el punto de intersección :

Método 1 : parametrizar  $r$  y hacer la intersección.

Método 2 : poner todo junto y resolver el sistema.

[Con resultado]

### Distancia

**190** Determine la distancia del punto  $A = (1, 2, 3)$  a la recta  $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y + 3z + 11 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$

[Con resultado]

**191** Determine la distancia entre las rectas  $r_1 \equiv \begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$  y  $r_2 \equiv \begin{cases} 2x + 2y - z - 3 = 0 \\ x - 3y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$

[Con resultado]

**192** Se consideran las rectas  $r_1$  que pasa por los puntos  $A = (0, 1, -1)$  y  $B = (1, 1, 0)$ , y

$r_2 \equiv \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$ . Compruebe que se cruzan y calcule la distancia entre ellas.

[Con resultado]

**193** Se considera la recta  $r \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$  y el plano  $\pi \equiv x + my - z = -6$ . Determine  $m$  para que  $r$  sea paralela a  $\pi$ . Calcule para dicho valor de  $m$ , la distancia entre  $r$  y  $\pi$ .

[Con resultado]

### Posición relativa

**194** Dados los planos  $\pi_1 \equiv 3x + 5y - 4z - 1 = 0$ ,  $\pi_2 \equiv x + 2y - z - 2 = 0$ , y  $\pi_3 \equiv -3x - 4y + 5z - 4 = 0$ . Estudie la posición relativa de los tres planos. [Con resultado]

**195** Estudie la posición relativa, dependiendo del valor del parámetro  $\lambda$ , del plano  $\pi \equiv 3\lambda x + 2y + 3z - 3 = 0$  y la recta  $r \equiv \begin{cases} x - \lambda y - z + 2 = 0 \\ x - y - z - 3 = 0 \end{cases}$

**196** Se consideran las rectas  $r_1$  que pasa por los puntos  $A = (0, 1, 0)$  y  $B = (1, 1, 0)$ , y  $r_2$  que pasa por los puntos  $C = (-1, 2, 1)$  y  $D = (2, 3, 4)$ . Estudie la posición relativa de dichas rectas. [Con resultado]

**197** Dada la recta  $r_1$  que pasa por los puntos  $A = (0; 1; 1)$  y  $B = (1; 1; 0)$ , y la recta  $r_2$  que pasa por los puntos  $C = (-1; 0; 1)$ , y  $D = (0; 3; 0)$ . Se pide estudiar si las dos rectas definen un plano que las contiene. [Con resultado]

**198** Dados los planos  $\pi_1 \equiv x + 3y - 7 = 0$ ,  $\pi_2 \equiv 3z - x - 8 = 0$ , y  $\pi_3 \equiv 9x + 13y - 14z + 7 = 0$ . Estudie la posición relativa de esos tres planos. [Con resultado]

### Varios

**199** De un paralelogramo ABCD se conocen únicamente los puntos  $A = (1, 1, 0)$ ,  $B = (-1, 2, 1)$  y  $C = (2, 3, 4)$ . Se pide determinar el cuarto punto D y el área de dicho paralelogramo. [Con resultado]

**200** Determine la área del cuadrilátero ABCD tal que  $A = (1; 2; 1)$ ,  $B = (4; 4; 1)$ ,  $C = (6; 1; 1)$ , y  $D = (2; -1; 1)$ . [Con resultado]

**201** Dado el plano  $\pi \equiv x - y + z - 3 = 0$ , determine todos los planos que contienen a los puntos  $A = (-1; 0; 0)$ ,  $B = (0; 1; 0)$  y forman un ángulo de  $30^\circ$  con el plano  $\pi$ .

Observación :  $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$  y  $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**202** Sean la recta  $r \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$  y el plano  $\pi \equiv 2x - y + z - 1 = 0$ . Halle las ecuaciones paramétricas de la recta  $s$ , proyección ortogonal de  $r$  sobre  $\pi$ . [Con resultado]

### Intersección

**203** Determine la ecuación general de tres planos, que son perpendiculares entre sí y tal que la intersección de dos de ellos es la recta  $r \equiv \begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$  [Con resultado]

**204** Se consideran la recta  $r \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$  y el plano  $\pi \equiv x + my - z = 6$ . Determine  $m$  para que  $r$  sea perpendicular a  $\pi$ . Calcule, para dicho valor de  $m$ , el punto de intersección. [Con resultado]

**205** Se consideran la recta  $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$  y el plano  $\pi \equiv x + my - z = 6$ . Determine  $m$  para que  $r$  sea perpendicular a  $\pi$ . Calcule, para dicho valor de  $m$ , el punto de intersección. [Con resultado]

### Para determinar

**206** Determine el punto Q que es el simétrico del punto P = (0,1,0) respecto al plano que determinan los puntos A = (1,1,0), B = (-1,2,1) y C = (2, 3,4). Observación: El punto Q es la imagen especular del punto P supuesto que el plano fuera un espejo. [Con resultado]

**207** Estudie los valores posibles de los coeficientes de la ecuación general del plano  $\pi \equiv \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$  para que dicho plano sea perpendicular a la recta  $r \equiv \begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x - 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$  y no contenga al punto origen. [Con resultado]

**208** Halle  $a$  y  $b$  para que los tres planos  $\pi \equiv x + 2y - z = 1$ ,  $\pi' \equiv 2x + y + az = 0$ ,  $\pi'' \equiv 3x + 3y - 2z = b$  contengan a una misma recta  $r$ . Determine unas ecuaciones paramétricas de  $r$ . [Con resultado]

**209** Dado el plano  $\pi$  de ecuación general  $3x + 5y - 4z - 1 = 0$ , determinar la ecuación general de cada uno de los planos que distan 2 unidades del plano  $\pi$ . [Con resultado]

**210** Estudie y determine en caso de existir, el plano que contiene a los puntos  $A = (1, 2, 1)$  y  $B = (7, 0, 0)$  y que es perpendicular a la recta  $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y + 3z - 5 = 0 \\ x - y - z + 3 = 0 \end{cases}$ . [Con resultado]

**211** Halle unas ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto  $A = (3, 5, 1)$  y corta a las dos rectas  $r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ .  $s \equiv x - 1 = y - 1 = \frac{z - 1}{-2}$ . [Con resultado]

**212** Determine la ecuación general de un plano que contiene al origen de coordenadas y es perpendicular a los planos  $\pi_1 \equiv x + y - z - 2 = 0$  y  $\pi_2 \equiv x - y + z + 1 = 0$ . [Con resultado]

**213** Determine la ecuación general de la recta  $s$  que está contenida en los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$ .  $\pi_1$  es el plano que contiene al origen y es perpendicular a la recta  $r \equiv \begin{cases} 2x - 2y - z + 2 = 0 \\ x - 2y - z - 3 = 0 \end{cases}$  y  $\pi_2$ , el plano que pasa por el origen y es paralelo al plano  $\pi \equiv 3x + 2y + 3z - 2 = 0$ . [Con resultado]

**214** Qué relación debe existir entre los coeficientes de la ecuación general del plano  $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$  para que dicho plano sea perpendicular a la recta  $r_2 \equiv \begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x - 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$  y contenga al punto de origen?

**215** Determine el punto  $Q$  que es simétrico del punto  $P = (3, 2, 0)$  respecto al plano que determinan los puntos  $A = (1, 4, 2)$ ,  $B = (-1, 5, 3)$  y  $C = (2, 6, 6)$ . Nota el punto  $Q$  es la imagen especular del punto  $P$  supuesto que el plano fuera un espejo. [Con resultado]

**216** Determine la ecuación general de tres planos, que son perpendiculares entre si y tal que la intersección de dos de ellos es la recta  $r \equiv \begin{cases} 3z - 3y - x + 5 = 0 \\ 3y - x - 3z - 4 = 0 \end{cases}$ . [Con resultado]

**217** Halle unas ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto  $A = (0, 2, -1)$  y corta a las dos rectas  $r := \begin{cases} x = 1 - 1\lambda \\ y = 1\lambda \\ z = 0 \end{cases}$  y  $s := \frac{1 - x}{-3} = \frac{1 - y}{-3} = \frac{z - 1}{-6}$ . [Con resultado]

**218** Halle  $p$  y  $q$  para que los tres planos  $\pi_1 := 3x + 6y - 3z - 15 = 0$ ,  $\pi_2 := 6x + 3y + 3pz = 0$ , y  $\pi_3 := 3x - q + 3y - 2z = 0$  contengan una misma recta  $r$ . Determine unas ecuaciones paramétricas de  $r$ . [Con resultado]

**219** Estudie los valores posibles de los coeficientes de la ecuación general del plano  $\pi \equiv \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$  para que dicho plano sea perpendicular a la recta  $r_2 \equiv \begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x - 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$  y que contenga al punto  $A = (-1, 3, -1)$ . [Con resultado]

**220** Sean los planos:

$$\pi_1 \equiv 2x + y - z + 5 = 0, \quad \pi_2 \equiv x + 2y + z + 2 = 0$$

1. Calcular las coordenadas de un punto  $P$ , sabiendo que está en el plano  $\pi_1$  y que su proyección ortogonal sobre el plano  $\pi_2$  es el punto  $(1, 0, -3)$ .
2. Calcular el punto simétrico de  $P$  respecto del plano  $\pi_2$ .

[Con resultado]



# Combinatoria

## 9.1. Variaciones con repetición ( $VR_n^k$ ) – orden y repetición.

**Definición 83** Dado un conjunto de  $n$  elementos distinguibles, se llama tupla (o bien combinación con repetición) de  $p$  elementos escogidos entre  $n$  a cualquier colección ordenada de  $k$  elementos del conjunto, con repeticiones eventuales de algunos de ellos.

**Teorema 84** Existen  $n^k$  posibilidades de formar tales tuplas :  $VR_n^k = n^k$ .

Ejemplo : Dado una urna que contiene 5 bolas numeradas de 1 a 5, ¿ de cuántas maneras podemos elegir 4 bolas si volvemos a colocar cada bola en la urna después de apuntar su número ? Solución : El número de resultados posibles es  $VR_k^n = n^k$  aquí  $VR_4^5 = 5^4 = 625$

Nota : (Bola 3;Bola 2)  $\neq$  (Bola 2;Bola 3)

Nota : También se puede nombrar variación repetitiva o variación de repetición

## 9.2. Variaciones ordinarias ( $V_n^k$ ) – orden sin repetición.

### 9.2.1. Definición

Las variaciones son una lista de elementos teniendo en cuenta el orden de los elementos. Cuando los elementos no se pueden repetir se generan variaciones ordinarias. Las distintas listas ordenadas están formadas por  $k$  elementos ( $k \leq n$ ) tomados entre  $n$  y que no se repiten.

**Teorema 85**

$$V_n^k = n(n-1)(n-2) \dots (n-(k-2))(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**Ejemplo 86** Dado una urna que contiene 10 bolas numeradas de 1 a 10, de cuantas maneras podemos elegir 3 bolas sucesivamente si no volvemos a colocar cada bola en la urna después de apuntar su número ?

Se trata de una 3-tupla,  $V_3^{10}$  posibilidades , es decir  $V_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$

## 9.3. Permutaciones $P^n$

**Definición 87** Una permutación ordinaria es la variación del orden de los elementos de un conjunto ordenado.

**Teorema 88** Al considerar un conjunto finito de  $n$  elementos, el número de permutaciones posibles es de  $P^n = n!$

**Ejemplo 89** De cuantas maneras diferentes podemos ordenar una lista de 18 candidatos a un examen ?

Se trata de una permutación de 18 elementos. Entonces existen 18! posibilidades.

## 9.4. Combinatoria sin repetición ( $C_n^p = \binom{n}{p}$ ) – sin orden y sin repetición.

**Definición 90** Dado un conjunto de  $n$  elementos distinguibles, se llama combinación sin repetición de  $p$  elementos, con  $p < n$ , elegidos entre  $n$ , a cualquier subconjunto de  $p$  elementos distintos del conjunto

**Teorema 91** El número de combinaciones sin repetición de  $p$  elementos, dentro de un conjunto de  $n$  elementos es de :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

**Nota 92**  $C_n^p = \binom{n}{p}$  se llaman números combinatorios

**Ejemplo 93** ¿ Cuántas combinaciones de 6 aciertos existen en la lotería primitiva ?

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = 13983816$$

**Teorema 94** •  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

## 9.5. Combinatoria con repetición $CR_n^p$ – sin orden y con repetición.

**Definición 95** Dado un conjunto de  $n$  elementos distinguibles, se llama combinación con repetición de  $p$  elementos, con  $p < n$ , elegidos entre  $n$ , a cualquier subconjunto de  $p$  elementos distintos del conjunto con repeticiones eventuales de algunos de ellos.

**Teorema 96** El número de combinaciones con repetición de  $p$  elementos, dentro de un conjunto de  $n$  elementos es de :

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^p = \binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}.$$

**Ejemplo 97** ¿ De cuántas forman elegirse simultáneamente tres bolas de una urna en la que hay al menos tres bolas blancas y tres negras indistinguibles ? Cada grupo es una disposición no ordenada de tres colores formada por los colores blanco y negro con repetición de alguno de ellos. Por tanto, se trata de determinar el número de grupos de tres elementos no ordenados. En este caso el número de formas distintas de elegir simultáneamente tres bolas del conjunto es

$$CR_2^3 = C_{3+2-1}^3 = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4.$$

**Nota 98** Antes de empezar los ejercicios, es importante saber que el evento contrarion  $\bar{A}$  se escribe a menudo  $A^C$  (significa complementario de  $A$ ).

## Ejercicios

**221** En una bodega hay 5 tipos de botellas diferentes. Calcule de cuántas formas posibles se pueden elegir 4 botellas.

**222** Una familia tiene tres hijos. Calcule,

1. Todas las permutaciones posibles en relación con el sexo de los mismos
2. La probabilidad de que exactamente dos de los hijos tengan el mismo sexo
3. La probabilidad de que sean dos varones y una hembra.

**223** En una reunión hay 10 personas. Calcule la probabilidad de que celebren su cumpleaños el mismo mes al menos dos personas.

**224** Una máquina de fabricación de tornillos produce el 20 % de ellos defectuosos. Calcule la probabilidad de que entre 4 tornillos elegidos al azar,

1. No haya ninguno defectuoso.
2. Solo haya uno defectuoso.

**225** Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos de un espacio de sucesos  $S$ , tales que :  $P(A) = \frac{2}{5}$ ,  $P(B) = \frac{1}{3}$ ,  $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ . Se pide :

1.  $P(A^C)$  y  $P(B^C)$
2.  $P(A^C \cup B^C)$  y  $P(A \cap B)$
3.  $P(A \cap B^C)$  y  $P(A^C \cap B^C)$

**Nota :** Escribir  $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$

**226** Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos tales que :  $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ ,  $P(B^C) = \frac{2}{3}$  y  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ .  
Halle  $P(B)$ ,  $P(A)$  y  $P(A^C \cap B)$ .

**227** Tres paracaidistas deportivos realizan tres saltos simultáneos sobre un portaviones, siendo la probabilidad de caer sobre el objetivo de 0,2 ; 0,3 y 0,4 respectivamente. Calcular las probabilidades de que en cada vuelo se alcancen los objetivos.(considerar todos los posibles casos. 0, 1, 2 o 3 paracaidistas alcancen el objetivo)

**228** Tres arqueros realizan tres disparos simultáneos, siendo la probabilidad de alcanzar el blanco 0,1, 0,2 y 0,3 respectivamente. Calcule la probabilidad de cada uno de los posibles blancos. Calcular la probabilidad de obtener al menos un blanco.

**229** En un hipermercado hay veinte cajeros varones y diez cajeras. La mitad de las cajeras y la mitad de los cajeros van a trabajar en coche. Calcule la probabilidad de que, al elegir un trabajador al azar, resulte ser :

1. Cajera o que va en coche.
2. Sabiendo que es cajero, ¿cuál es la probabilidad de que vaya en coche?

**230** Tres jugadores disparan un penalti, siendo la probabilidad de hacer gol, 30 %, 40 % y 50 % respectivamente. Calcular:

1. Probabilidad de meter 2 goles
2. Probabilidad de meter al menos 1 gol

**231** En tres bolsas de lona numeradas tenemos repartidas bolas de colores de la siguiente forma: La primera bolsa tiene 5 bolas rojas y 2 blancas, la segunda contiene 3 bolas rojas y 1 blanca y la tercera tiene 2 bolas rojas y 7 blancas.

1. Escogemos una bolsa al azar y extraemos una bola. Si la bola ha sido roja ¿cuál es la probabilidad de haber sido extraída de la 1bolsa?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer dos bolas consecutivamente y con reemplazamiento, estas sean blancas?

**232** Supongamos que tenemos tres tarjetas, de las cuales una tiene ambas caras rojas, la otra ambas caras blancas y la tercera una cara blanca y otra roja. Se extrae una al azar y se coloca sobre la mesa.

1. ¿Cuál es la probabilidad que la cara de arriba sea roja?
2. Si la cara de arriba es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la de abajo también lo sea?



## Ejercicios a granel y una selectividad

**233** Selectividad junio 2008. Sea  $f$  la función definida para  $x > 0$  por

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$$

Determinar las asíntotas de la gráfica de  $f$ .

**234** Selectividad junio 2009. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x - 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Estudiar la continuidad y derivabilidad de  $f$ .
2. Determinar sus asíntotas y extremos relativos.
3. Esbozar la gráfica de  $f$

**235** Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-4}{-1}$$

y que corta al eje  $X$  en el punto de abscisa 3.

**236** Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{1-y}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

y perpendicular al plano  $x - y + z = 0$ .

**237** Selectividad Junio 2001. Calcular  $a$  sabiendo que los planos

$$ax + y - 7z = -5 \quad \text{y} \quad x + 2y + a^2z = 8$$

se cortan en una recta que pasa por el punto  $A(0, 2, 1)$  pero que no pasa por el punto  $B(6, -3, 2)$ .

**238** Selectividad Junio 2002. Calcular la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano  $\pi \equiv x + y - z + 6 = 0$  con la recta  $s \equiv \frac{x}{3} = y - 2 = z + 1$  y es paralela a la recta

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

**239** Selectividad septiembre 2009. Consideremos el punto  $P(1, 0, 0)$  y las rectas  $r$  y  $s$  definidas como

$$r \equiv x - 3 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2}, \quad s \equiv (x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(-1, 2, 0)$$

- Estudiar la posición relativa de  $r$  y  $s$ .
- Hallar la ecuación del plano  $\pi$  que pasando por  $P$  es paralelo a  $r$  y a  $s$ .

**240** **Selectividad septiembre 2010.** Hallar la ecuación del plano  $\pi$  que es paralelo a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y + 11 = 0 \\ 2y + z - 19 = 0 \end{cases}$$

y contiene a la recta:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 - 5\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

**241** **Selectividad septiembre 2010.** Consideremos los planos  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  y  $\pi_3$  dados respectivamente por las ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv x + y = 1, \quad \pi_2 \equiv ay + z = 0, \quad \pi_3 \equiv x + (a + 1)y + az = a + 1$$

1. ¿Cuánto ha de valer  $a$  para que no tengan ningún punto en común?

2. Para  $a = 0$ , determinar la posición relativa de los planos.

**242** **Selectividad septiembre 2008.** Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = 2x + |x^2 - 1|$ .

1. Esboza la gráfica de  $g$ .

2. Calcular  $\int_0^2 g(x) dx$ .

**243** **Selectividad septiembre 2008.** Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones definidas por

$$f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = 2x + 2$$

1. Esbozar las gráficas de  $f$  y  $g$ .

2. Calcular el área del recinto limitado por dichas gráficas.

**244** Determinar  $a$  y  $b$  sabiendo que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ -x + y + 2z = -1 \\ ax + by + z = 4 \end{cases}$$

tiene al menos dos soluciones distintas.

**245** Considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = -2 \\ -lx + 3y + z = -7 \\ x + 2y + (l + 2)z = -5 \end{cases}$$

1. Clasificar el sistema según los valores del parámetro  $l$ .

2. Resolver el sistema cuando sea compatible indeterminado.

**246** **Selectividad Junio 2000.** Dibujar el recinto limitado por las curvas

$$y = e^{x+2}, \quad y = e^{-x}, \quad x = 0$$

y hallar su área.

**247** **Selectividad Junio 2002.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = xe^{-x}$ . Esbozar el recinto limitado por la curva  $y = f(x)$ , los ejes coordenados y la recta  $x = -1$ . Calcular su área.

**248** **Selectividad junio 2008.** Calcular

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x^2 - x)(x - 1)} dx$$

**249** **Selectividad Junio 2002.** Determinar la matriz  $X$  que verifica la ecuación  $AX = X - B$  siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

**250** Selectividad Septiembre 2003. Considerar las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. ¿Para qué valores de  $m$  tiene solución la ecuación matricial  $A \cdot X + 2B = 3C$ ?

2. Resuelve la ecuación matricial dada para  $m = 1$ .

**251** Selectividad Septiembre 2000. Calcular el punto de la recta de ecuaciones

$$x - 1 = \frac{y + 2}{2} = \frac{z + 1}{-3}$$

más cercano al punto  $A(1, -1, 1)$ .

**252** Selectividad Junio 2002. Calcular el área del triángulo de vértices

$$A(1, 1, 2), \quad B(1, 0, -1), \quad C(1, -3, 2)$$

**253** Selectividad Junio 2003. Sabiendo que las rectas

$$r \equiv x = y = z \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

se cruzan, hallar los puntos  $A$  y  $B$ , de  $r$  y  $s$  respectivamente, que están a mínima distancia.

**254** Selectividad septiembre 2009. Se considera la función  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$$

Determinar la asíntota de la gráfica de  $f$ .

**255** Selectividad junio 2007. Dada la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \ln(1 + x^2)$$

Hallar la primitiva de  $f$  cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas. ( $\ln$  denota la función logaritmo neperiano).

**256** Discutir, en función del valor de  $a$  el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para  $a = 2$ , ¿tiene  $A$  matriz inversa?. En caso afirmativo, calcularla.

**257** Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el origen y corta a las rectas:

$$x = 2y = z - 1 \quad ; \quad \frac{x}{2} = \frac{y - 1}{3} = z$$

**258** Selectividad 2021

Determine  $\int x^2 \ln x^2 dx$  (logaritmo neperiano)

**259** Selectividad 2021

En una urna hay 10 bolas blancas, 6 bolas negras y 2 bolas verdes y en otra urna, hay 6 bolas blancas y 8 bolas negras y 4 bolas verdes. Se han extraído dos bolas simultáneamente de una misma urna sin que se sepa de qué urna, y resulta que son blancas. Determine la probabilidad de que esas dos bolas salieran de la primera urna.

**260** Selectividad 2021

Hallar el volumen del tetraedro que determina el plano  $x + 2y + 2z - 4 = 0$  con los ejes coordenadas.

**261** Selectividad 2021

Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = A^{-1} - A$ . Estudie el rango de la matriz  $B$ .

**262 Selectividad 2021**

Se elige un número entero al azar entre 0 y 9999 (ambos incluidos), ¿Cuál es la probabilidad de que el número elegido sea mayor que 4444 y múltiplo de 5 ?

**263 Selectividad 2021**

Estudie y represente la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

**264 Selectividad 2021**

Sean la recta  $r$  determinada por los planos  $x - 2y - 2z - 1 = 0$  y  $x + 5y - z = 0$  y el plano  $\pi$  definido por  $2x + y + mz = n$ , donde  $m$  y  $n$  son números reales. Estudie los valores que deben tener  $m$  y  $n$  para que la recta y el plano sean :

1. Secantes
2. Paralelos

**265 Selectividad 2021**

Sea la matriz  $C = A^2 - 4A - 6B$  donde  $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Estudie el rango de  $C$  en función del valor del número  $a$ .

**266** Calcule las integrales siguientes :

1.  $\int \frac{-2x^3 + 3x + 3}{x^2 + 1} dx.$
2.  $\int \frac{x}{5 + 4x^2} dx.$
3.  $\int \frac{\cos x}{5 + 3 \operatorname{sen} x} dx.$

**En las páginas siguientes, hay un ejemplo de selectividad y un ejemplo del documento oficial de respuesta.**



code élève

<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	9
<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	9

Nom et prénom :

### Preguntas de Test (5 puntos)

Chaque question admet une unique bonne réponse. Une bonne réponse est comptée **0,5 point**. Une mauvaise réponse est comptée **-0,1 point**. L'absence de réponse est comptée **0 point**. Vous pouvez faire une croix ou noircir proprement la case pour chaque question, correspondant à la bonne réponse. Si vous vous trompez, effacez à l'aide de blanc couvrant la case cochée par erreur. Dans ce cas, ne reconstituez pas la case effacée, cela pourrait être considéré comme une bonne réponse

**Question 1**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 2x}{6x - 3}$  es

Entonces

- $+\infty$         $\ell > 2$        Ninguna de las otras

**Question 2**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x} - x$  es

Entonces

- $+\infty$         $\ell < -1$        Ninguna de las otras

**Question 3**

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{Si } x < 2 \\ x + 2 & \text{Si } x \geq 2 \end{cases}$$

- $f$  no es continua       En todo punto de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  es continua y derivable       Ninguna de las otras

**Question 4**

Sean las funciones  $f(x) = e^x$  y  $g(x) = x^2$ . Entonces :

- La pendiente a la curva  $y = f(x)$  coge todos los valores de  $\mathbb{R}$ .  
 Existe varios valores  $a$  tal que las tangentes en  $a$  a  $f$  y  $g$  sean paralelas.       Ninguna de las otras

**Question 5**

$$\text{Sea la función } f(x) = \int_0^{\ln x} \frac{1}{1 + e^{2t}} dt$$

Entonces :

- $f'(1) > 3$         $f'(1) < 1$        Ninguna de las otras

**Question 6** Sean las rectas  $r : \frac{x-1}{-2} = y - 2 = z + 1$  y  $s : (x, y, z) = (4, 1, 1) + \lambda(1, 0, -3)$

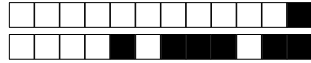
Son

- Secantes       la distancia entre ellas es  $d > 2$ .       Ninguna de las otras

**Question 7** Sea la recta  $r : x + 1 = \frac{y+2}{2} = \frac{z+5}{-1}$  y  $P = (3, 4, 5)$

Entonces

- la distancia entre  $P$  y  $r$  es  $d > 10$ .        $P \in r$        Ninguna de las otras



**Question 8** Sean los planos  $\pi_1 : 2x + y - z - 3 = 0$  y  $\pi_2 : 4x + 2y - 2z - 7 = 0$ .

Entonces

- la distancia  $d$  entre  $\pi_1$  y  $\pi_2$  cumple  $d > \frac{1}{2}$ .  son secantes  Ninguna de las otras

**Question 9** Sean los planos  $\pi_1 : x - y + 2z - 1 = 0$  y  $\pi_2 : \begin{cases} x = 2 + \lambda - 3\mu \\ -1 - \lambda + 2\mu. \\ z = 2\lambda - \mu \end{cases}$

Entonces

- paralelos estrictamente  son secantes  Ninguna de las otras

**Question 10**

Un examen de oposición consiste en desarrollar por escrito un tema de un total de 50. El tribunal elige al azar 2 temas y cada candidato debe contestar correctamente uno de los dos.

La probabilidad  $p$  de que un candidato apruebe la oposición si se sabe solo 35 temas cumple :

- $0,1 \leq p \leq 0,5$    $0,5 < p < 0,8$   Ninguna de las otras

**Question 11**

Se sabe que, en un grupo de trabajo de 35 personas, hay 15 personas que toman té, 27 que toman café y 2 personas que no toman ninguna bebida.

El numero  $n$  de personas que toman café unicamente cumple :

- $n > 20$    $n < 10$   Ninguna de las otras

**Question 12** La matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & m & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ -m & -3 & 0 \end{pmatrix}$  tiene como rango

- 3 si  $m > 0$   2 para una única valor de  $m$   Ninguna de las otras

**Question 13** La matriz  $A = \begin{pmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{pmatrix}$  es invertible cuando

- Si  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$    $a > 0$  y  $b < 0$   Ninguna de las otras

**Question 14** Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  El coeficiente  $a_{23}$  de la matriz inversa de  $A$  cumple :

- $a_{23} > 0$    $a_{23} < -1$   Ninguna de las otras

**Question 15** Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2x \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$  La matriz  $A^4$  tiene inversa si :

- $x < -2$    $x > 4$   Ninguna de las otras



## Problemas

Conteste solo a una opción.

### Opción 1

#### Problema 1 (2,5 puntos)

En un instituto de 500 personas se cumple que el número de alumnos que juega al fútbol son 300, que juegan al baloncesto 150, que hacen ciclismo 120, que juegan fútbol y baloncesto son 90, al fútbol y ciclismo 20, baloncesto y ciclismo 25, y por fin que practican los tres deportes 3. Calcular:

1. La probabilidad de que elegido al azar un alumno no haga ningún deporte.
2. La probabilidad de que elegido al azar un alumno no juegue al baloncesto.
3. La probabilidad de que elegido al azar un alumno juegue al baloncesto o al fútbol.
4. La probabilidad de que elegido al azar un alumno practiquen algún deporte.

#### Problema 2 (2,5 puntos)

Dada la función

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

se pide :

1. Representar gráficamente la curva  $y = f(x)$ , discutiendo razonadamente su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y extremos relativos.
2. Explicar si la curva  $y = f(x)$  tiene tangentes que contengan el punto origen  $O$  y encontrarlas en caso de existir.

### Opción 2

#### Problema 3 (2,5 puntos)

Calcular las integrales indefinidas siguientes :

1.  $\int e^{3x} \operatorname{sen}(2x) dx$
2.  $\int \ln(25 + x^2) dx$
3.  $\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx$  poniendo  $t = \sqrt{x}$ .

#### Problema 4 (2,5 puntos)

Sea  $\pi_1 : 2x - y + z = 0$ , y  $\pi_2$  el plano  $\pi_2$  que contiene a las rectas  $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$  y  $s : \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = z - 1$ .

1. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de  $\pi_1$  y  $\pi_2$ .
2. Hallar el ángulo que forman estos planos.

# HOJA DE LECTORA ÓPTICA PARA LAS PREGUNTAS TIPO TEST

Nombre  Primer apellido  Segundo apellido  Centro

Letra 1 pasaporte  Letra 2 pasaporte  D.N.I. / Pasaporte  Letra N.I.F.  Código de asignatura  Opción

A  B  C  D  A  B  C  D  A  B  C  D  A  B  C  D  A  B  C  D

**DEBE COMPLETAR TODOS LOS DATOS, SI SU PASAPORTE NO PUEDE ESCRIBIRLO EN LAS CASILLAS ASIGNADAS ASEGÚRESE DE REFLEJARLO CORRECTAMENTE EN LAS SIGUIENTES HOJAS EN EL LUGAR INDICADO**

**EL CÓDIGO DE ASIGNATURA PUEDE CONFIRMARLO EN LA CABECERA DE LAS SIGUIENTES HOJAS (DEBAJO DEL CÓDIGO DE BARRAS)**

Es imprescindible entregar esta hoja para salir del aula  
NO ESCRIBIR EN EL REVERSO DE ESTA HOJA

¿Desea obtener un certificado de asistencia?  
(Rellenar el cuadro completamente)

## INSTRUCCIONES:

BIEN  MAL

Las casillas deben rellenarse en su totalidad con bolígrafo negro o azul. NO USAR LÁPIZ NI TIP-EX

CASO 1: Si sólo se marca una fila, la respuesta correcta es ésa

**C1**

Anular	A	B	C	D
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

CASO 2: Si se marca la segunda fila, no se tiene en cuenta la primera

**C2**

Anular	A	B	C	D
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

CASO 3: Marcar "Anular" es igual que no contestar a la pregunta

**C3**

Anular	A	B	C	D
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

<b>1</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>11</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>21</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>31</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>2</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>12</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>22</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>32</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>3</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>13</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>23</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>33</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>4</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>14</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>24</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>34</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>5</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>15</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>25</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>35</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>6</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>16</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>26</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>36</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>7</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>17</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>27</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>37</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>8</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>18</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>28</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>38</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>9</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>19</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>29</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>39</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<b>10</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>20</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>30</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<b>40</b> Anular <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

 0000130		Entrevista	001	
		ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 Y 45 AÑOS		00
Junio - 2017 Original	Duración: 60 min.	EXAMEN: Tipo -	Nacional 2ª Prueba Presencial	
[*NÚM.] Material: Ninguno	MATERIAL PERMITIDO		Hoja 2 de 3	

Aquí se muestra la materia a realizar

CÓDIGO DE LA ASIGNATURA

AQUÍ SE INDICA LA DURACIÓN DE LA PRUEBA

TIPO DE ESTUDIOS

MUESTRA EL LUGAR DE EXAMEN Y EL NÚMERO DE HOJAS QUE COMPONEN LA PRUEBA

Aquí se mostrarán las preguntas del examen, puede comenzar a contestar a continuación.  
**La parte de desarrollo debe responderse en español.**



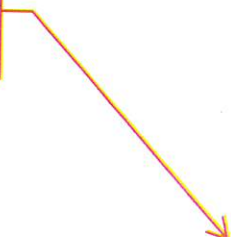
<b>UNED</b>	DNI:	FECHA:	CENTRO DE EXAMEN:
	ESTUDIANTE:		
	ESTUDIOS: UNEDasiss		
	ASIGNATURA:		

Se deben consignar los datos personales reflejados en la matrícula en el área sombreada. Asegúrese de entregar esta hoja de examen



**HOJA DE RESPUESTA**  
PUEDE SOLICITAR TANTAS COMO NECESITE MIENTRAS NO ESTÉ ESPECIFICADO EN EL EXAMEN LA EXTENSIÓN MÁXIMA DE LA PRUEBA O LAS PREGUNTAS.  
DEBE COMPLETAR LOS DATOS QUE SE SOLICITAN EN TODAS LAS HOJAS DE RESPUESTA QUE DESEE ENTREGAR, TENIENDO EN CUENTA QUE LAS CASILLAS SOMBREADAS SON OBLIGATORIAS.

DEBE INDICAR EL NÚMERO DE HOJA QUE CORRESPONDA, DEL TOTAL DE HOJAS DEL EXAMEN



Escriba por ambas caras

Hoja  de

## Algunos resultados...

### Resultado del ejercicio 1

num 3 : Sistema incompatible

num 5 :  $(-1; 1; -2)$

num 6 :  $(1; 1; 2)$

num 7 :  $(-1; 1; 8)$

num 8 :  $(5; -4; 3)$

num 9 :  $(1; -2; 3)$

num 10 :  $(\frac{3}{2}; -2; \frac{1}{2})$

### Resultado del ejercicio 3

En el grupo A hay 24 personas mientras hay 20 en el B y 21 en el C.

### Resultado del ejercicio 5

• Hay que determinar la proporción  $f_x, f_y, f_z$  de billetes de 10,20 y 50.

Por lo tanto tenemos

$$\begin{cases} f_z = 5f_y \\ 2f_x = 3f_y \\ f_x + f_y + f_z = 1 \end{cases}$$

Se resuelve el sistema y se encuentra :  $x = \frac{1}{5}, y = \frac{2}{15}, z = \frac{2}{3}$ .

• Sea  $N$  el numero total de billetes y  $x, y, z$  el número de billetes de 10,20, 50. Entonces  $10x + 20y + 50z = 28500$  y

$$\text{por lo tanto } 10\frac{N}{5} + 20\frac{2N}{15} + 50\frac{2N}{3} = 28500$$

Tenemos entonces  $N = 750, x = 150, y = 100, z = 500$ .

### Resultado del ejercicio 6

1. Poner un sistema con  $x$  el número de libros nuevos y  $y$  en el número de libros usados.

Se encuentra  $x = 600$  y  $y = 200$ .

2. Se hace otro sistema con  $a$  el número de usados a 40% y  $b$  el número de usados a 50%. Entonces se tiene un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas y se llega a  $a = 110$  y  $b = 90$ .

### Resultado del ejercicio 10

Se encuentra  $A^2$  y luego se ve que  $A^3 = A$

por lo tanto cuando  $n$  es par tenemos  $A^n = A^2$  y para  $n$  impar tenemos  $A^n = A$ . Esto se demuestra por inducción.

### Resultado del ejercicio 14

Las matrices son diagonales entonces basta con hacer el producto termino a termino de los numeros de la diagonal.

$$\text{Tenemos } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

### Resultado del ejercicio 16

Tenemos entonces  $\frac{1}{2}(A^2 - A) = I$  y entonces  $\frac{1}{2}(A.A - A.I) = I$  y factorizando por  $A$  :

$A\frac{1}{2}(A - I) = I$  por lo tanto  $A$  tiene inversa y

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

### Resultado del ejercicio 18

$$\text{si } n \text{ es par : } A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$$

$$\text{si } n \text{ es impar : } A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & a^{n-1} \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & -a^n \end{pmatrix}$$

### Resultado del ejercicio 21

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ o bien}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

### Resultado del ejercicio 22

$$A^{10} = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

### Resultado del ejercicio 24

$$i = 12; j = -40k; k = -a(2 - a); m = (b - a)(c - a)(c - b)$$

### Resultado del ejercicio 27

Los dos dan 1

### Resultado del ejercicio 28

El primero da -20 y el segundo 60

### Resultado del ejercicio 29

$$\det(A(2B^2)) = \det A, 2^3 \cdot (\det B)^2 = -200$$

$$\det(A \cdot (2B^2) \cdot (3A^{-1})) = \det A, 2^3 \cdot (\det B)^2 \cdot 3^3 \cdot \frac{1}{\det A} = 5400$$

### Resultado del ejercicio 30

Se encuentra 0

### Resultado del ejercicio 31

Es 4.

**Resultado del ejercicio 32**

$$d_1 = -\frac{3}{2}; d_2 = 63$$

**Resultado del ejercicio 33**

$$2a^2(x+a)$$

**Resultado del ejercicio 34**

$$|-3A| = -54, |A^{-1}| = \frac{1}{2}; -4; -2.$$

**Resultado del ejercicio 35**

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & 2 & -3 \\ -7 & 1 & 2 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Resultado del ejercicio 36**

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{y} & \frac{1}{y} \\ -\frac{1}{x} & 1 & 0 \\ \frac{1}{x} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Resultado del ejercicio 39**

Cuando  $\lambda = 1$  o  $\lambda = 3$ ,  $A$  no tiene inversa. En los otros casos, si.

**Resultado del ejercicio 42**

Las solución está ya en la libreta

**Resultado del ejercicio 43**

si  $\lambda \notin \{1; -1\}$  entonces el sistema es compatible determinado de solución (usando el método de Cramer):

$$\left( \frac{3\lambda + 2}{3(\lambda + 1)}; 1; -\frac{3\lambda^2 + 3\lambda + 1}{3(\lambda + 1)} \right)$$

**Resultado del ejercicio 44**

Caso 1: si  $\lambda \notin \{1; -1\}$  el sistema es compatible determinado de solución

$$\left( \frac{3\lambda^3 - 7\lambda + 3}{2(\lambda - 1)(\lambda + 1)}; \frac{3\lambda^3 + 2\lambda^2 - 9\lambda - 1}{2(\lambda - 1)(\lambda + 1)}; \frac{2 - \lambda^2}{\lambda - 1} \right)$$

Caso 2: si  $\lambda = 1$  o  $\lambda = -1$  el sistema es incompatible.

**Resultado del ejercicio 45**

$S$  compatible determinado si y solo si  $a \notin \{1; -1\}$ .

En este caso la solución es  $\left( \frac{-8a^2 - 6}{a^2 - 1}; \frac{2(a^2 + 1)}{a^2 - 1}; \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} \right)$

Si  $a = 1$  o  $a = -1$  pues el sistema es incompatible.

**Resultado del ejercicio 46**

El determinante del sistema es  $\det(A) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1)$ . Por lo tanto, el sistema es compatible determinado cuando  $\lambda \notin \{1; -1; 0\}$  Si  $\lambda \in \{1; -1; 0\}$  entonces usando el método de Gauss, se ve que el sistema es compatible indeterminado.

Por lo tanto el sistema siempre tiene soluciones.

**Resultado del ejercicio 47**

$S$  compatible determinado si y solo si  $a \notin \{0; -1\}$  y entonces la solución es  $\left( 0; \frac{-1}{a+1}; \frac{a}{a+1} \right)$

Si  $a = 0$ , el sistema es compatible indeterminado de solución  $(-2z; -1 + z; z)$  con  $z \in \mathbb{R}$ .

Si  $a = -1$ , el sistema es incompatible.

**Resultado del ejercicio 48**

$S$  compatible determinado si y solo si  $\lambda \notin \{1; -1\}$  y entonces la solución es

$$\left( \frac{3\lambda^3 - 9\lambda + 3}{2(\lambda + 1)(\lambda - 1)}; \frac{3\lambda^3 + 2\lambda^2 - 9\lambda - 1}{2(\lambda + 1)(\lambda - 1)}; \frac{-\lambda^2 - 2\lambda + 2}{\lambda + 1} \right)$$

Si  $\lambda = 1$  o  $\lambda = -1$ , el sistema es incompatible.

**Resultado del ejercicio 49**

$$\text{Tenemos } X = ACA^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -13 & -29 \\ 5 & 25 \end{pmatrix}$$

**Resultado del ejercicio 50**

Solo hay dos soluciones que son  $A = I$  o  $A = -I$ .

**Resultado del ejercicio 53**

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

**Resultado del ejercicio 57**

$$\text{Rango}(A) < 3 \iff \alpha \in \{0; 1\}$$

**Resultado del ejercicio 58**

Si  $\alpha = 0$  entonces  $\text{Rango}(A) = 2$

Si  $\alpha \neq 0$  entonces  $\text{Rango}(A) = 3$

**Resultado del ejercicio 59**

Si  $a \notin \{1; -2\}$  entonces  $\text{Rango}(A) = 3$ .

Si  $a = 1$  entonces  $\text{Rango}(A) = 1$ .

Si  $a = -2$  entonces  $\text{Rango}(A) = 2$ .

**Resultado del ejercicio 60**

$$\text{rango}(A^4) < 3 \iff \det(A^4) = 0 \iff \det(A) = 0 \iff \alpha^2 = 2 \iff \alpha = \sqrt{2} \text{ o } \alpha = -\sqrt{2}$$

**Resultado del ejercicio 62**

$$r = 2; r = 2; r = \begin{cases} 1, & \text{si } t = 4 \\ 2, & \text{si } t \neq 4 \end{cases}$$

**Resultado del ejercicio 62**

$$r = \begin{cases} 2, & \text{si } a = 3 \\ 4, & \text{si } a \neq 3 \end{cases}$$

**Resultado del ejercicio 64**

$$r(A) = \begin{cases} 1, & \text{si } t = 0 \\ 2, & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

**Resultado del ejercicio 65**

$$r = \begin{cases} 1, & \text{si } a = b = c \\ 2, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

**Resultado del ejercicio 66**

$|A| = (3a + b)b^2$ . Si  $b \neq 0$  y  $b + 3a \neq 0$  el rango es 3. Si  $b = 0$  y  $a \neq 0$  rango es 1. Si  $b = 0$  y  $a = 0$  rango es 0. Si  $b \neq 0$  con  $b + 3a = 0$  entonces el rango es 2.

**Resultado del ejercicio 68**

Si  $m = 4$ ,  $\text{rango}(A) = 1$ ; Si  $m \neq 4$ ,  $\text{rango}(A) = 3$

**Resultado del ejercicio 69**

1.  $\det A = m^2 - 5m + 6$  entonces para  $m \neq 2$  y  $m \neq 3$  el sistema es compatible determinado

2. para  $m = 2$   $\text{Rango}(A) = 2$  y  $\text{Rango}(A') = 2$  sistema compatible indeterminado

para  $m = 3$   $\text{Rango}(A) = 2$  y  $\text{Rango}(A') = 3$  sistema incompatible

**Resultado del ejercicio 73**

(parcial)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$ .

Tenemos  $f(x) = x(5x^3 - 16)$ .

Luego  $f$  creciente en  $(-\infty, 0)$  y  $\left( \sqrt[3]{\frac{16}{5}}; +\infty \right)$

$f$  decreciente en  $\left( 0; \sqrt[3]{\frac{16}{5}} \right)$ .

Tenemos  $f''(x) = 20x^3 - 16$ .

Luego  $f$  convexa en  $\left(\sqrt[3]{\frac{16}{20}}; +\infty\right)$

$f$  concava en  $\left(-\infty; \sqrt[3]{\frac{16}{20}}\right)$ .

Hay un punto de inflexión en  $x = \frac{16}{20}$ .  
 $x = 0$  y  $x = 2$  son los puntos de cruce con  $(X'X)$ .

#### Resultado del ejercicio 78

(parcial) :

El dominio es  $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$ .

$f(x) = \frac{x}{x-1}$  sobre  $D$ .

$r \equiv x = 1$  es asíntota vertical

2 discontinuidad evitable.

#### Resultado del ejercicio 82

El dominio es  $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$ .

2 discontinuidad evitable.

$r \equiv x = 1$  es asíntota vertical

$r \equiv 2x + 2$  es asíntota oblicua en  $+\infty$  y  $-\infty$ .

#### Resultado del ejercicio 89

Se ve que  $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{(x-1)(x-4)}$

por lo tanto

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-4)}$$

y por división euclidiana :

$$f(x) = x + 2 + \frac{5}{(x-4)}$$

#### Asíntotas y límites

$y = x + 2$  asíntota oblicua en  $+\infty$  y  $-\infty$ .

En  $x = 1$  hay una discontinuidad evitable (el límite es  $\frac{4}{3}$ )

$x=4$  es asíntota vertical.

#### Variaciones

$$f(x) = \frac{(x-4)^2 - 5}{(x-4)^2}$$

por lo tanto

$f(x)$  es del signo de  $P(x) = (x-4-\sqrt{5})(x-4+\sqrt{5})$  y

se deduce las variaciones

#### Resultado del ejercicio 94

Dominio  $D = \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .

$f'(x) = (x-1)e^x$ ;  $f''(x) = xe^x$ .

Se deduce las variaciones de  $f$  y la convexidad: antes de 0 es cóncava y después convexa.

#### Resultado del ejercicio 95

$D = [0; 3]$ ;  $f$  derivable en  $]0; 3[$  y  $f(x)$  est del signo de  $3 - 2x$ .

#### Resultado del ejercicio 114

Con  $p = 20$  y  $q = 6$   $f$  es continua sobre  $\mathbb{R}$  y derivable sobre  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$  pero no en  $-3$  y  $3$ .

#### Resultado del ejercicio 133

$$I = \frac{8}{7}(x+1)^7 + K, K \in \mathbb{R}.$$

#### Resultado del ejercicio 134

$$I = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + K, K \in \mathbb{R}.$$

#### Resultado del ejercicio 135

$$I = \arctg(e^x) + K, K \in \mathbb{R}$$

#### Resultado del ejercicio 136

$$I = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin(2x) + K, K \in \mathbb{R}.$$

#### Resultado del ejercicio 137

$$I = 2 \ln|x-1| + 3 \ln|x+1| + K, K \in \mathbb{R}.$$

#### Resultado del ejercicio 138

Tenemos  $\text{grado}(2x+1) < \text{grado}(x^2+4x+8)$  por lo tanto se tiene que calcular descomponiendo en elementos básicos.

Aquí  $x^2 + 4x + 8$  tiene  $\Delta < 0$ , por lo tanto no tiene raíces.

Entonces el método es :

$$R(x) = \frac{2x+1}{x^2+4x+8} = \frac{2x+4}{x^2+4x+8} - \frac{3}{x^2+4x+8}$$

La primitiva de la primera función es fácil y la segunda :

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{3}{x^2+4x+8} dx \\ &= 3 \int \frac{1}{(x+2)^2+4} dx \\ &= 3 \int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1} dx \\ &= 3 \arctan\left(\frac{x+2}{2}\right) \end{aligned}$$

#### Resultado del ejercicio 139

Se tiene primero que estudiar el signo de  $f(x) - g(x)$ . Tenemos

$$f(x) - g(x) = (x^2 - 1)(x - 1)$$

Entonces  $f(x) - g(x) = (x-1)^2(x+1)$  y  $(f(x) \geq g(x))$  en  $[-1; 1]$

por lo tanto la área es  $A = \int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) dx = \frac{4}{3} u.a.$

#### Resultado del ejercicio 141

$$I = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x), K \in \mathbb{R}.$$

#### Resultado del ejercicio 142

$$I = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin(2x) + K, K \in \mathbb{R}.$$

#### Resultado del ejercicio 143

$$I = \ln|x| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + K, K \in \mathbb{R}.$$

#### Resultado del ejercicio 144

$$I = \frac{1}{16} \arctg\left(\frac{4}{3}x\right) + K, K \in \mathbb{R}.$$

#### Resultado del ejercicio 145

$$I = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} \arctg(2x) + K, K \in \mathbb{R}.$$

#### Resultado del ejercicio 146

$$I = 1$$

#### Resultado del ejercicio 147

$$I = \frac{1}{2} \text{tg}(x^2) - \frac{x^2}{2} + K, K \in \mathbb{R}.$$

#### Resultado del ejercicio 148

$$I = 0$$

#### Resultado del ejercicio 150

$$I = e - 2$$

#### Resultado del ejercicio 151

$$I = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + K, K \in \mathbb{R}.$$

#### Resultado del ejercicio 152

$$I = -\frac{1}{x} \ln(x) - \frac{1}{x} + K, K \in \mathbb{R}.$$

#### Resultado del ejercicio 155

$$I = \frac{1}{4}x + \frac{5}{8} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(2x) + K, K \in \mathbb{R}.$$

**Resultado del ejercicio 156**

$$I = x - \ln|x+1| + K, K \in \mathbb{R}.$$

**Resultado del ejercicio 157**

$$I = \frac{3}{4}x - \frac{5}{8} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(2x) + K; K \in \mathbb{R}$$

**Resultado del ejercicio 158**

$$I = \frac{\sqrt{2}}{\ln 4} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(2^{x-\frac{1}{2}}) + K, K \in \mathbb{R}.$$

**Resultado del ejercicio 159**

$$I = 4\sqrt{2}$$

**Resultado del ejercicio 161**

Desarrollando usando el triángulo de Pascal tenemos  $I = \frac{4672}{693}$

**Resultado del ejercicio 162**

$$I = \frac{1}{2}$$

**Resultado del ejercicio 165**

$$I = \cos(2x)\left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{x}{2} \operatorname{sen}(2x) + K, K \in \mathbb{R}.$$

**Resultado del ejercicio 167**

$$I = 2x^4 + \frac{1}{7}(x+1)^7 + K, K \in \mathbb{R}.$$

**Resultado del ejercicio 168**

$$I = \frac{1}{3} \operatorname{tg}(x^3) - \frac{1}{3}x^3 + K, K \in \mathbb{R}.$$

**Resultado del ejercicio 170**

$$I = \frac{1}{10} \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\frac{5}{2}x\right) + K, K \in \mathbb{R}.$$

**Resultado del ejercicio 172**

$$I = 2 \ln|x| + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x\right) + K, K \in \mathbb{R}.$$

**Resultado del ejercicio 174**

$$I = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln \sqrt{2}$$

**Resultado del ejercicio 175**

$$I = -\frac{x^7}{7} - \frac{3}{2}x^6 - \frac{24}{5}x^5 - \frac{9}{4}x^4 + \frac{24}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + x + K, K \in \mathbb{R}.$$

**Resultado del ejercicio 176**

$$I = -\frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) - 2 \cos x + \frac{3}{2}x + K, K \in \mathbb{R}.$$

**Resultado del ejercicio 177**

$$I = \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + K, K \in \mathbb{R}.$$

**Resultado del ejercicio 178**

Se hace dos veces por partes y tenemos  $I = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$

**Resultado del ejercicio 179**

$$I = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\ln|x|) + K, K \in \mathbb{R}.$$

**Resultado del ejercicio 182**

$$I = \ln|x^3 - 9x| + K, K \in \mathbb{R}.$$

**Resultado del ejercicio 183**

$$I = -\frac{2}{3} \cos^3 x + K; K \in \mathbb{R}.$$

**Resultado del ejercicio 184**

$$I = 2x + \frac{1}{4} \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}x\right) + K, K \in \mathbb{R}$$

**Resultado del ejercicio 185**

$$I = -\left(\frac{x^7}{7} + x^6 + \frac{12}{5}x^5 + 2x^4\right) + K, K \in \mathbb{R}.$$

**Resultado del ejercicio 189**

$r$  tiene como vector director  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$

y cogiendo  $z = 0$  dentro de  $r$  se encuentra el punto  $A = (1; 1; 0) \in r$ .

Entonces las paramétricas de  $r$  son :

$$r \equiv \begin{cases} x = t - \frac{13}{5} \\ y = 6t - \frac{8}{5} \\ z = -5t \end{cases}$$

Entonces  $M \in \pi \cap r \iff 3\left(t - \frac{13}{5}\right) + 56t - \frac{8}{5} + 20t - 1 = 0 \iff t = \frac{84}{5 \times 53}$

Entonces usando las paramétricas de  $r$ , el punto de intersección es  $M\left(-\frac{121}{53}; \frac{16}{53}; -\frac{84}{53}\right)$ .

**Resultado del ejercicio 190**

Cogemos  $\vec{u}$  vector director de  $r$   $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$

Cogemos un punto  $P(x; y; -3)$  de  $r$ . Por lo tanto

$$\begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ x - y = -4 \end{cases}$$

Entonces  $P = (-2; -2; -3) \in r$ .

Entonces

$$\operatorname{dist}(A; r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = 3 \frac{\sqrt{229}}{\sqrt{62}}$$

**Resultado del ejercicio 191**

Se coge  $R_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) \in R_1$  y  $R_2 = (1, 0, -1) \in R_2$

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}, \overrightarrow{R_1 R_2} = \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{-1} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$[\overrightarrow{R_1 R_2}; \vec{r}_1; \vec{r}_2] = \begin{vmatrix} 0 & 3 & \frac{1}{3} \\ -2 & -7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & -8 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$\text{Y } \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Entonces tenemos

$$\operatorname{dist}(r_1, r_2) = \frac{4}{\sqrt{76}} = \frac{2\sqrt{19}}{19}$$

**Resultado del ejercicio 192**

$$\operatorname{dist}(r_1; r_2) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

**Resultado del ejercicio 193**

$\vec{n}(1; m; -1)$  vector normal de  $\pi$  y  $\vec{u} = (1; -1; -1)$  vector director de  $r$ .

$r$  y  $\pi$  paralelos si y solos  $\vec{n}$  ortogonal a  $\vec{u}$  si y solo si  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$

entonces se encuentra  $m = 2$  y por lo tanto  $\text{dist}(r, \pi) = \text{dist}(R, \pi)$  donde  $R$  es un punto de  $r$ .

Con  $R = (0; 1; -1)$  tenemos  $\text{dist}(r; \pi) = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

**Resultado del ejercicio 194**

Usando los rangos de la matriz  $M$  y de la ampliada  $M$  encontramos que

$$\text{rango}(M) = \text{rango}(M) = 2$$

Por lo tanto  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  se cortan según una recta  $r$  y resolviendo el sistema parametrizando tenemos

$$r \equiv \begin{cases} 3t - 8 \\ 5 - t \\ t \end{cases}$$

**Resultado del ejercicio 196**

1. Se calcula la paramétricas de  $r_1$  y  $r_2$
2. Se ve que no son paralelas
3. Se busca  $M \in r_1 \cap r_2$  y se ve que no hay puntos de intersección.

Al final  $r_1$  y  $r_2$  se cruzan.

**Resultado del ejercicio 197**

Primero, con los vectores directores se ve que  $(AB)$  y  $(CD)$  no so paralelas.

segundo se encuentran las paramétricas de :

$$(AB) \equiv \begin{cases} 0 + t \\ 1 \\ 1 - t \end{cases} \quad (CD) \equiv \begin{cases} -1 + k \\ 3k \\ 1 - k \end{cases} \text{ con } t; k \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Entonces } M \in (AB) \cap (CD) \text{ si y solo si } \begin{cases} t = -1 + k \\ 1 = 3k \\ 1 - t = 1 - k \end{cases}$$

esto es imposible entonces no definen un plano que las contiene.

**Resultado del ejercicio 198**

Estudiando con los rangos, se ve que los planos se cortan

$$\text{segun la recta } r \equiv \begin{cases} x = 3t - 8 \\ y = 5 - t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

**Resultado del ejercicio 199**

Buscamos a  $D$  con  $\vec{AD} = \vec{BC}$  ; tenemos  $D = (4, 2, 3)$  y entonces

$$\mathcal{A}(ABCD) = \|\vec{AB} \times \vec{AD}\| = \sqrt{110}$$

**Resultado del ejercicio 200**

$$\mathcal{A}(ACD) = \frac{1}{2} \|\vec{AC} \times \vec{AD}\| = 7$$

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{13}{2}$$

$$\text{Por lo tanto } \mathcal{A}(ABCD) = \frac{27}{2}$$

**Resultado del ejercicio 202**

$$s \equiv \begin{cases} x = -4 + 16t \\ y = -3 + 10t; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 6 - 22t \end{cases}$$

**Resultado del ejercicio 203**

Se puede coger  $\pi_1 \equiv x + y - z - 2 = 0$ ,  $\pi_2 \equiv x + z = 0$ , y  $\pi_3 \equiv x - 2y - z + \frac{5}{2} = 0$ .

**Resultado del ejercicio 204**

$$m = -1$$

$M(2; -1; -3)$  es el punto de intersección.

**Resultado del ejercicio 205**

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$  es vector director de  $r$  y tiene que ser colineal

a  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ -1 \end{pmatrix}$  entonces  $m = -2$ .

se encuentra el punto  $A = (0, -1, -1)$  punto de la recta y entonces las paramétricas de  $r$  :

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -2t - 1, t \in \mathbb{R} \\ z = -t - 1 \end{cases}$$

luego se encuentra el punto de intersección :  $M = (\frac{1}{2}; -2; \frac{-3}{2})$ .

**Resultado del ejercicio 206**

$$Q(\frac{4}{55}; \frac{73}{55}; \frac{-2}{11})$$

**Resultado del ejercicio 207**

$$(\alpha; \beta; \gamma; \delta) \in \{(\lambda; 0\lambda; \delta) \text{ con } \delta \neq 0\}$$

**Resultado del ejercicio 208**

$$a = -1, b = 1, r \equiv \begin{cases} t - 1 \\ t, t \in \mathbb{R}. \\ 3t - 2 \end{cases}$$

**Resultado del ejercicio 209**

$$\pi_1 \equiv 3x + 5y - 4z + 10\sqrt{2} - 1 = 0 \text{ y } \pi_2 \equiv 3x + 5y - 4z - 10\sqrt{2} - 1 = 0$$

**Resultado del ejercicio 210**

Se busca el plano ortogonal a  $r$  pasando por  $A$  (es unico):

Encontramos

$$\pi \equiv x + 67 - 5z - 8 = 0$$

Se ve que  $B \notin \pi$  por lo tanto el plano pedido no existe.

**Resultado del ejercicio 211**

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

**Resultado del ejercicio 212**

El plano  $\pi \equiv y + z = 0$

**Resultado del ejercicio 213**

$$\text{Se puede tomar } s \equiv \begin{cases} -7\lambda \\ 6\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ 3\lambda \end{cases}$$

**Resultado del ejercicio 215**

$$Q(\frac{173}{55}; \frac{146}{55}; -\frac{20}{55})$$

**Resultado del ejercicio 216**

Sean  $\pi_1 \equiv -x - 3y + 3z + 5 = 0$  y  $\pi_2 \equiv -x + 3x - 3z - 4 = 0$  . Entonces  $r = \pi_1 \cap \pi_2$  y usando

el producto vectorial de los vectores normales tenemos

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ vector director de } r.$$

Cogemos entonces  $\pi_3$  de vector normal  $\vec{u}$ .

$$\pi_3 \equiv y + z = 0$$

De momento, tenemos entonces  $\pi_1 \perp \pi_3$  y  $r \subset \pi_1$ .

El último plano que buscamos es  $\pi_2$  que tiene que contener  $r$  y ser ortogonal a ambos planos  $\pi_1$  y  $\pi_3$ .

$$\text{Su vector normal es entonces } \vec{n}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\pi_2 \equiv -6x + y - z + d = 0$$

Por construcción  $\pi_2$  ortogonal a  $\pi_1$  y  $\pi_3$  y es paralelo a  $r$ . Hace falta ahora que contenga un punto de  $r$ .

fijamos  $y = 0$  dentro de  $r$ . Entonces tenemos  $x = \frac{1}{2}$  y  $z = -\frac{3}{2}$ .

Entonces  $A = (\frac{1}{2}; 0; \frac{3}{2}) \in r$  y escribiendo  $a \in \pi_2$  tenemos

$$d = \frac{3}{2}.$$

Los tres planos son :  $\pi_1 \equiv -x - 3y + 3z + 5 = 0$ ,  $\pi_2 \equiv -6x + y - z + \frac{3}{2} = 0$ ,  $\pi_3 \equiv y + z = 0$ .

### Resultado del ejercicio 217

Paso 1 : Se encuentra la ecuación de  $\pi$  tal que  $A \in \pi$  y  $r \subset \pi$ .

Sea  $B = (1, 0, 0) \in r$

Entonces  $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  son vectores directores de  $\pi$ .

Entonces  $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  vector normal de  $\pi$ .

Al final tenemos  $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$

Paso 2 : Encontramos el punto de intersección de  $\pi$  y  $s$ .

$$s \equiv \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 3t + 1 \\ z = -6t + 1 \end{cases}$$

Pues  $P = (3t + 1, 3t + 1, -6t + 1) \in s \cap \pi$  si y solo si  $3t + 1 + 3t + 1 - 6t + 1 - 1 = 0$  si y solo si  $2 = 0$ .

Entonces no hay puntos de intersección.

Entonces cualquiera recta que corta a  $r$  y contiene  $A$  no es coplanaria a  $s$  y por lo tanto no cortara a  $s$ .

No hay solución.

### Resultado del ejercicio 218

Sea  $A$  la matriz del sistema y  $A$  la ampliada.

Queremos  $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A) = 2$ .

$\det A = 0$  implica  $p = -1$

Luego tomando una submatriz  $B$  de tamaño 3 de  $A$  y diciendo  $\det(B) = 0$  tenemos  $q = 5$ .

Entonces resolviendo el sistema por Gauss encontramos la recta  $r$  :

$$R \equiv \begin{cases} x = t - \frac{5}{3} \\ x = t + \frac{10}{3} \\ z = t \end{cases}$$

### Resultado del ejercicio 219

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  vector normal de  $\pi$  entonces  $\alpha = t$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = t$ .

Luego  $\pi \equiv tx + tz + \delta = 0$  y  $A = (1; 3; -1) \in \pi$  entonces tenemos

$$(\alpha; \beta; \gamma; \delta) = (t; 0; t; 2t) \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

### Resultado del ejercicio 220

Se encuentra  $r$  recta ortogonal a  $\pi_2$  que contiene  $A = (1; 0; -3)$ .

Tenemos

$$r \equiv \begin{cases} t + 1 \\ 2t \\ t - 3 \end{cases} ; \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

El punto  $P$  que buscamos es entonces la intersección de  $r$  y  $\pi_1$ .

Se encuentra  $t = -\frac{10}{3}$  y  $P = (-\frac{7}{3}; -\frac{20}{3}; -\frac{19}{3};)$

Luego para encontrar el simétrico  $P$  tenemos  $\vec{PP} = 2\vec{PA}$  y traduciendo con coordenadas, tenemos :

$$P = (\frac{13}{3}; \frac{20}{3}; \frac{1}{3};)$$