Devoir de Mathématiques N^o 13 (1 heure)

Exercice 1 :

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + y - 2z + 4 = 0$ et les points A de coordonnées $(3\,;\ 2\,;\ 6)$, B de coordonnées $(1\,;\ 2\,;\ 4)$, et C de coordonnées $(4\ ;\ -2\ ;\ 5)$.

1. (a) Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.
   (b) Vérifier que ce plan est le plan $\mathcal{P}$.
2. (a) Montrer que le triangle ABC est rectangle.
   (b) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par O et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.
   (c) Soit K le projeté orthogonal de O sur $\mathcal{P}$. Calculer la distance OK.
   (d) Calculer le volume du tétraèdre OABC.
3. On considère, dans cette question, le système de points pondérés

$$S = \{(\mathrm{O},\ 3),\ (\mathrm{A},\ 1),\ (\mathrm{B},\ 1),\ (\mathrm{C},\ 1)\}$$

   (a) Vérifier que ce système admet un barycentre, qu'on notera G.
   (b) On note I le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que G appartient à (OI).
   (c) Déterminer la distance de G au plan $\mathcal{P}$.
4. Soit Γ l'ensemble des points M de l'espace vérifiant :

$$\left\|3\overrightarrow{M\mathrm{O}} + \overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}}\right\| = 5.$$

   Déterminer Γ. Quelle est la nature de l'ensemble des points communs à $\mathcal{P}$ et Γ ?

Exercice 2 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions : chacune comporte trois réponses, une et une seule étant exacte.
Les réponses à cet exercice sont à inscrire dans la feuille jointe en annexe, en cochant pour chaque question la case correspondante à la réponse proposée.
Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse. Toute réponse exacte entraîne une bonification, toute erreur est pénalisée.
On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en années, d'un appareil ménager avant la première panne. On peut modéliser cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement, définie sur l'intervalle $[0,\ +\infty[$. Ainsi, la probabilité d'un intervalle $[0,\ t[$, notée $p([0,\ t[)$, est la probabilité que l'appareil ménager tombe en panne avant l'instant t.

Cette loi est telle que $p([0,\ t[) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$, où t est un nombre réel positif représentant le nombre d'années (loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$).

1. Pour $t \geqslant 0$, la valeur exacte de $p([t,\ +\infty[)$ est :
   a. $1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ **b.** $\mathrm{e}^{-\lambda t}$ **c.** $1 + \mathrm{e}^{-\lambda t}$
2. La valeur de t pour laquelle on a $p([0,\ t[) = p([t,\ +\infty[)$ est :
   a. $\dfrac{\ln 2}{\lambda}$ **b.** $\dfrac{\lambda}{\ln 2}$ **c.** $\dfrac{\lambda}{2}$
3. D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18. La valeur exacte de λ est alors :
   a. $\ln\left(\dfrac{50}{41}\right)$ **b.** $\ln\left(\dfrac{41}{50}\right)$ **c.** $\dfrac{\ln(82)}{\ln(100)}$
4. Sachant que cet appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années après sa mise en service, la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante est :
   a. $p([1,\ +\infty[)$ **b.** $p([3, +\infty[)$ **c.** $p([2\ ;\ 3[$
   Dans la suite de l'exercice on prendra $\lambda = 0,2$.
5. La probabilité que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années, arrondie à 10^{-4} près, est :
   a. $0,552\,3$ **b.** $0,548\,8$ **c.** $0,451\,2$
6. Dix appareils neufs de ce type ont été mis en service en même temps. On désigne par X la variable alatoire égale au nombre d'appareils qui n'ont pas de panne au cours des trois premières années.
   La valeur la plus proche de la probabilité de l'évènement « $X = 4$ » est :
   a. $0,555\,5$ **b.** $0,802\,2$ **c.** $0,160\,7$