Durée : 4 heures — Le 29 avril 2009

Devoir de mathématiques

Obligatoire et spécialité

La calculatrice est autorisée

Exercice 1 (7 points) : Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction $f : t \longmapsto (2-t)\mathrm{e}^t$ est une primitive de $g : t \longmapsto (1-t)\mathrm{e}^t$ sur $[0 ; 1]$.
   En déduire la valeur de u_1.
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul,

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad \text{(R)}$$

Partie B

On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (u_n) en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.
Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

Valeur de n	Valeur de u_n affichée par la première calculatrice	Valeur de u_n affichée par le deuxième calculatrice
1	7,182 818 284 5E−01	7,182 818 284 6E−01
2	4,365 636 569 1E−01	4,365 636 569 2E−01
3	3,096 909 707 5E−01	3,096 909 707 6E−01
4	2,387 638 830 1E−01	2,387 638 830 4E−01
5	1,938 194 150 8E−01	1,938 194 152 0E−01
6	1,629 164 905 1E−01	1,629 164 912 0E−01
7	1,404 154 335 81E−01	1,404 154 384 0E−01
8	1,233 234 686 9E−01	1,233 235 072 0E−01
9	1,099 112 182 8E−01	1,099 115 648 0E−01
10	9,911 218 282 5E−02	9,911 564 800 0E−01
11	9,023 401 108 0E−02	9,027 212 800 0E−02
12	8,280 813 296 3E−02	8,326 553 600 0E−02
13	7,650 572 852 2E−02	8,245 196 800 0E−02
14	7,108 019 930 9E−02	1,543 275 520 0E−01
15	6,620 298 963 6E−02	1,314 913 280 06E+00
16	5,924 783 418 6E−02	2,003 861 248 0E+01
17	7,213 181 161 2E−03	3,396 564 121 6E+02
18	−8,701 627 390 9E−01	6,112 815 418 9E+03
19	−1,753 309 204 2E+01	1,161 424 929 6E+05
20	−3,516 618 408 5E+02	2,322 848 859 2E+06
21	−7,385 898 658 0E+03	4,877 982 504 3E+07
22	−1,624 907 704 7E+05	1,073 156 149 9E+09
23	−3,737 288 720 9E+06	2,468 259 144 8E+10
24	−8,969 493 030 2E+07	5,923 821 947E+11
25	−2,242 372 585E+09	1,480 955 486 9E+13

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

Partie C

Dans cette partie on se propose d'étudier la suite (u_n) à partir de la définition :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant 0$.
2. (a) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel non nul n

$$(1-t)^n \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e} \times (1-t)^n.$$

   (b) En déduire que pour tout n non nul, $u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie D

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (u_n).

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$$

Étant donné un réel a, on considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = a \quad \text{et pour tout entier naturel non nul } n,\ v_{n+1} = (n+1)v_n - 1.$$

1. En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n + (n!)(a + 2 - \mathrm{e})$ où $n!$ désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.
2. Étudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a.
   (On rappelle que $\lim\limits_{n \to +\infty} n! = +\infty$.)
3. En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.

Exercice 2 (4 points) : Commun à tous les candidats

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\dfrac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.
   (a) Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?
   (b) Quelle est son espérance ?
   (c) Calculer $P(X = 2)$.
2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. Et on lance le dé choisi trois fois de suite.
   On considère les évènements D et A suivants :
   - D : « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;
   - A : « obtenir exactement deux 6 ».

   (a) Calculer la probabilité des évènements suivants :
      - « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
      - « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».

      (On pourra construire un arbre de probabilité).

   (b) En déduire que : $p(A) = \dfrac{7}{48}$.
   (c) Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?
3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).
   On note B_n l'évènement « obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».
   (a) Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n de l'évènement B_n.
   (b) Calculer la limite de la suite (p_n). Commenter ce résultat.

Exercice 3 (5 points) : Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm.
Soit A, B et C les points d'affixes respectives :

$$a = 3 - \mathrm{i}, \quad b = 1 - 3\mathrm{i} \text{ et } c = -1 - \mathrm{i}.$$

1. (a) Placer ces points sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
   (b) Quelle est la nature du triangle ABC ?
   (c) Démontrer que les points A et B appartiennent à un même cercle Γ de centre O, dont on calculera le rayon.
2. Soit M un point quelconque du plan d'affixe notée m et N le point d'affixe notée n, image de A dans la rotation r de centre M et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.
   (a) Donner l'écriture complexe de la rotation r.
   (b) En déduire une expression de n en fonction de m.
3. On appelle Q le milieu du segment [AN] et q son affixe.
   Montrer que : $q = \frac{(1 - \mathrm{i})m}{2} + 2 + \mathrm{i}$.
4. Dans cette question, M est un point du cercle Γ.
   (a) Justifier l'existence d'un réel θ tel que : $m = \sqrt{10}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
   (b) Calculer $|q - 2 - \mathrm{i}|$. Quel est le lieu Γ' de Q lorsque M décrit le cercle Γ ?

Exercice 3 (5 points) : Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. L'unité graphique est 2 cm.
Le but de cet exercice est d'étudier la similitude plane indirecte f d'écriture complexe :

$$z' = \mathrm{i}\sqrt{2}\overline{z} + 2\mathrm{i}\sqrt{2} - 2,$$

et d'en donner deux décompositions.

I. Restitution organisée de connaissances
On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude plane directe autre qu'une translation est de la forme $z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes avec $a \neq 1$.
Déterminer en fonction de a et de b l'affixe du centre d'une telle similitude plane directe.

II. Première décomposition de f
Soit g la similitude plane directe d'écriture complexe :

$$z' = \mathrm{i}\sqrt{2}z + 2\mathrm{i}\sqrt{2} - 2.$$

1. Préciser les éléments caractéristiques de g (centre, rapport, angle).
2. Déterminer une réflexion s telle que $f = g \circ s$,

III. Deuxième décomposition de f

1. Montrer que f admet un unique point invariant noté Ω. Déterminer l'affixe ω de Ω.
2. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation : $y = x + 2$.
   Montrer que pour tout point N appartenant à $\mathcal{D}$, le point $f(N)$ appartient aussi à $\mathcal{D}$.
3. Soit σ la réflexion d'axe $\mathcal{D}$ et k la transformation définie par : $k = f \circ \sigma$.
   (a) Donner l'écriture complexe de σ.
   (Indication : on pourra poser $z' = a\overline{z} + b$ et utiliser deux points invariants par σ pour déterminer les nombres complexes a et b.)
   (b) En déduire que l'écriture complexe de k est : $z' = \sqrt{2}z + 2\sqrt{2} - 2$.
   (c) Donner la nature de la transformation k et préciser ses éléments caractéristiques.
4. Déduire de ce qui précède une écriture de la similitude indirecte f comme composée d'une réflexion et d'une homothétie,

Exercice 4 (4 points) : Commun à tous les candidats

Partie A

On considère l'ensemble (E) des suites (x_n) définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation suivante :
pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} - x_n = 0,24x_{n-1}$.

1. On considère un réel λ non nul et on définit sur $\mathbb{N}$ la suite (t_n) par $t_n = \lambda^n$.
   Démontrer que la suite (t_n) appartient à l'ensemble (E) si et seulement si λ est solution de l'équation $\lambda^2 - \lambda - 0,24 = 0$.
   En déduire les suites (t_n) appartenant à l'ensemble (E).

   On admet que (E) est l'ensemble des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par une relation de la forme :

   $$u_n = \alpha(1,2)^n + \beta(-0,2)^n \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux réels.}$$

2. On considère une suite (u_n) de l'ensemble (E).
   Déterminer les valeurs de α et β telles que $u_0 = 6$ et $u_1 = 6,6$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{39}{7}(1,2)^n + \dfrac{3}{7}(-0,2)^n$.
3. Determiner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_0 = 6 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,4x - 0,05x^2$.
   (a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;8]$.
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
   $0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8$.
2. En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.