Devoir de Mathématiques N^o 10 (2 heures)

Le barême est approximatif.

Exercice 1 (3 points) :

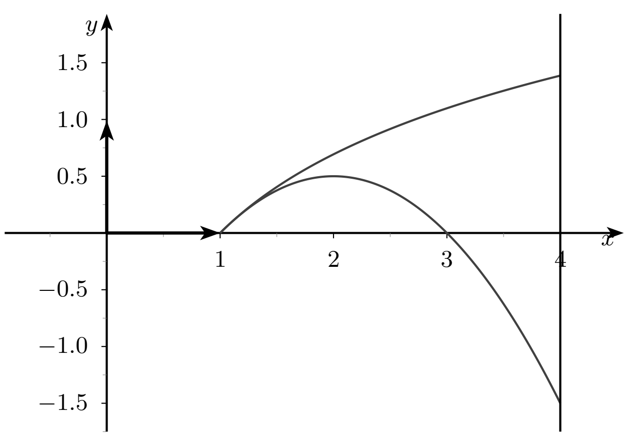
1. Calculer
$$\int_0^1 2^x 3^{x+1}\, dx$$

2. On donne $g(x) = \displaystyle\int_0^{\ln x} \frac{\sin^2 t}{t-1}\, dt$
Déterminer le domaine de définition de g, puis dresser son tableau de variations (on ne demande pas les limites).

Exercice 2 (4 points) :

1. (a) Soit x un éel supérieur ou égal à 1.
Calculer en fonction de x l'intégrale $\displaystyle\int_1^x (2-t)\,\mathrm{d}t$.
(b) Démontrer que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, on a : $2 - t \leqslant \dfrac{1}{t}$.
(c) Déduire de ce qui précède que pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a :
$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} \leqslant \ln x.$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - \dfrac{3}{2}$.
Sur le graphique joint en annexe, le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel on a tracé les courbes représentatives des fonctions h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1\ ;\ 4]$. On a a tracé également la droite (d) d'équation $x = 4$.
(a) Démontrer que $\displaystyle\int_1^4 h(x)\mathrm{d}x = 0$ et illustrer sur le graphique ce résultat.
(b) On note (D) le domaine du plan délimité par la droite (d) et les courbes représentatives des fonction h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1\ ;\ 4]$.
En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire de (D) en unités d'aire.



Exercice 3 (5 points) :

Partie A

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0\,,\,+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x}\,e^{1-x}$$

Elle est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. On note f' sa dérivée.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f et montrer en particulier que f décroissante sur $[1;+\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)dt$.

1. Interpréter géométriquement u_n
2. Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$.
4. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
5. Prouver la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

Exercice 4 (4 points) :

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par

$$J_n = \int_1^n \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
2. On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par :

$$I_n = \int_1^n (t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

   (a) Justifier que, pour tout $t \geqslant 1$, on a $\sqrt{t+1} \leqslant t+1$.
   (b) En déduire que $J_n \leqslant I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
   (c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_n en fonction de n.
   (d) En déduire que la suite (J_n) est majorée.
   (e) La suite (J_n) est-elle convergente ?

Exercice 5 (4 points) :

On pose pour tout entier naturel n non nul :

$$I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n\,dx$$

1. Montrer que (I_n) est décroissante.
2. Montrer que (I_n) est convergente. On note ℓ la limite de (I_n).
3. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n :

$$3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$$

4. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$