Devoir de Mathématiques N^o 10 (2 heures)

Le barême est approximatif.

Exercice 1 (3 points) :

La figure sera complétée au cours de l'exercice et remise avec la copie(voir verso). On y laissera apparents les traits de construction.
Dans le plan orienté, on donne le triangle ABC tel que AB = 2, AC= 3 et $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
Soit S la similitude directe transformant B en A et A en C.

1. Quel est l'angle et le rapport de S ?
2. On appelle Ω le centre de S. Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre [AB] et à la droite (BC). Construire le point Ω.
3. On note D l'image du point C par la similitude S.
   (a) Démontrer l'alignement des points A, Ω et D ainsi que le parallélisme des droites (CD) et (AB). Construire le point D.
   (b) Calculer la longueur CD
4. **Cette question n'est pas à faire dans le devoir, elle est à traiter pour le mercredi 1 avril.**
   Soit E le projeté orthogonal du point B sur la droite (CD).
   Expliquer la construction de l'image F du point E par S et placer F sur la figure.

Exercice 2 (4 points) :

1. (a) Soit x un éel supérieur ou égal à 1.
   Calculer en fonction de x l'intégrale $\displaystyle\int_1^x (2-t)\,\mathrm{d}t$.
   (b) Démontrer que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, on a : $2 - t \leqslant \dfrac{1}{t}$.
   (c) Déduire de ce qui précède que pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a :
   $$-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} \leqslant \ln x.$$
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - \dfrac{3}{2}$.
   Sur le graphique joint en annexe, le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$ dans lequel on a tracé les courbes représentatives des fonctions h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1\ ;\ 4]$. On a a tracé également la droite (d) d'équation $x = 4$.
   (a) Démontrer que $\displaystyle\int_1^4 h(x)\mathrm{d}x = 0$ et illustrer sur le graphique ce résultat.
   (b) On note (D) le domaine du plan délimité par la droite (d) et les courbes représentatives des fonction h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1\ ;\ 4]$.
   En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire de (D) en unités d'aire.

Exercice 3 (5 points) :

Partie A

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0\,,\ +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x}\,e^{1-x}$$

Elle est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$. On note f' sa dérivée.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f et montrer en particulier que f décroissante sur $[1; +\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$.

1. Interpréter géométriquement u_n
2. Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$.
4. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
5. Prouver la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

Exercice 4 (4 points) :

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par

$$J_n = \int_1^n \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
2. On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par :

$$I_n = \int_1^n (t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

   (a) Justifier que, pour tout $t \geqslant 1$, on a $\sqrt{t+1} \leqslant t+1$.
   (b) En déduire que $J_n \leqslant I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
   (c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_n en fonction de n.
   (d) En déduire que la suite (J_n) est majorée.
   (e) La suite (J_n) est-elle convergente ?

Exercice 5 (4 points) :

On pose pour tout entier naturel n non nul :

$$I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n\,dx$$

1. Montrer que (I_n) est décroissante.
2. Montrer que (I_n) est convergente. On note ℓ la limite de (I_n).
3. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n :

$$3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$$

4. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

Figure Exercice 1

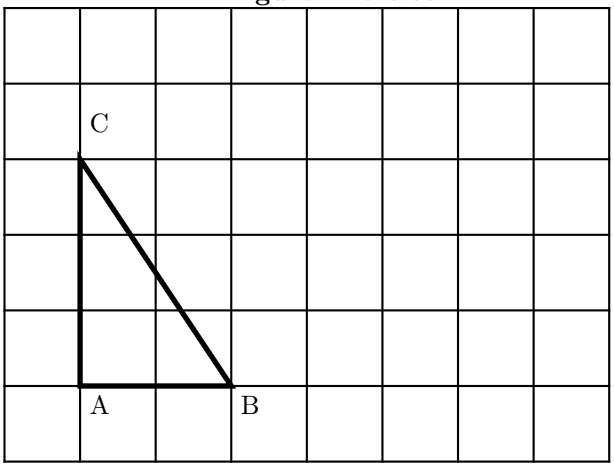
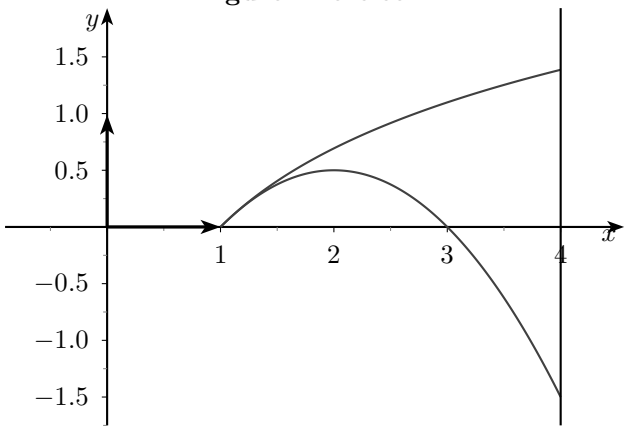
Figure Exercice 2