

Devoir de Mathématiques N° 8 (1 heure)

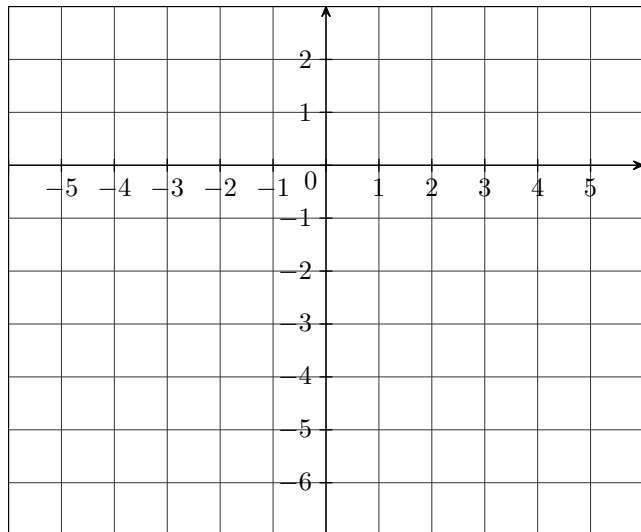


Le barème est approximatif.

Exercice 1 (6 points) :

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points $A(3 + 2i)$, $B(-3)$, $I(1 - 2i)$.

1. Ecrire sous forme algébrique $Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$.
Que pouvez-vous en déduire pour le triangle IAB ?
2. Calculer l'afixe z_C du point C image de I par l'homothétie de centre A et rapport 2.
3. Calculer l'afixe z_D du point D image de B par la rotation de centre A et angle $\frac{\pi}{2}$.
4. Quelle est la nature de $ABCD$?

**Exercice 2 (7 points) :**

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

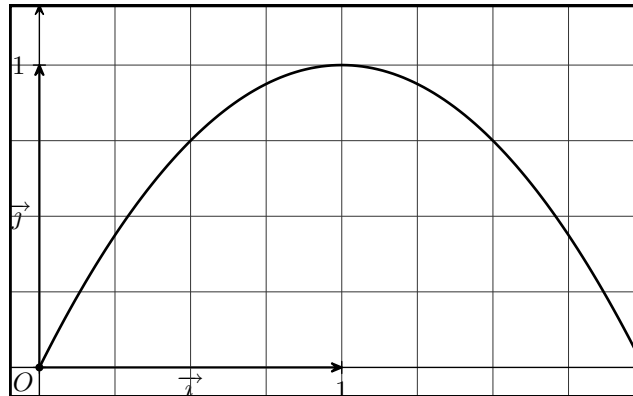
$$u_0 = a, \quad \text{et, pour tout entier } n, \quad u_{n+1} = u_n(2 - u_n).$$

où a est un réel donné tel que $0 < a < 1$.

1. On suppose dans cette question que $a = \frac{1}{8}$

On a tracé dans le repère ci-joint la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction :
 $f : x \mapsto x(2 - x)$.

Construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 .



2. On suppose dans cette question que a est un réel quelconque de l'intervalle $]0; 1[$.
 - (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier n , $0 < u_n < 1$.
 - (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
 - (c) Que peut-on en déduire?
 - (d) Déterminer si elle existe la limite de (u_n) .

Exercice 3 (7 points) :

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4} \end{cases}$$

1. On considère la suite s_n définie pour tout entier naturel n par : $s_n = u_n + v_n$.
A l'aide d'un raisonnement par récurrence montrer que s_n est constante égale à 2.
2. On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par : $d_n = v_n - u_n$.
Montrer que (d_n) est géométrique et donner l'expression de d_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire les expressions de (u_n) et (v_n) .
4. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent et déterminer leurs limites.