Devoir surveillé de mathématiques

Terminales S – Obligatoire

Mercredi 21 janvier 2009
Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est autorisé.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 — 6 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

1. *Question de cours*
   Prérequis : « Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = \left(\vec{u}, \vec{w}\right)$. »
   Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.
   a. Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right) \quad (2\pi)$.
   b. Interpréter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$.
2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives
   $$z_A = 4 + \mathrm{i}, \quad z_B = 1 + \mathrm{i}, \quad z_C = 5\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_D = -3 - \mathrm{i}$$
   Placer ces points sur une figure.
3. Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :
   $$z' = (1 + 2\mathrm{i})z - 2 - 4\mathrm{i}$$
   a. Préciser les images des points A et B par f.
   b. Montrer que f admet un unique point invariant Ω, dont on précisera l'affixe ω.
4. a. Montrer que pour tout nombre complexe z, on a :
   $$z' - z = -2\mathrm{i}(2 - \mathrm{i} - z)$$
   b. En déduire, pour tout point M différent du point Ω, la valeur de $\dfrac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}\right)$.
   c. Quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$?
   d. Soit E le point d'affixe $z_E = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$. Écrire z_E sous forme exponentielle puis placer le point E sur la figure. Réaliser ensuite la construction du point E' associé au point E.

Exercice 2 — 6 points

$(O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe.
Soit A le point d'affixe $1 + \mathrm{i}$.
Au point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que
$$z' = \frac{1}{2}\left(z + \mathrm{i}\overline{z}\right)$$

1. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ avec x, y, x' et y' réels.
   a. Démontrer les égalités suivantes :
   $$x' = \frac{1}{2}(x + y) \quad \text{et} \quad y' = \frac{1}{2}(x + y)$$
   En déduire que le point M' appartient à la droite (OA).

b. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $M = M'$.

c. Démontrer que pour tout point M du plan les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont orthogonaux.

2. M_1 est le point d'affixe $z_1 = \mathrm{i}z$, M_2 le point d'affixe $z_2 = \overline{z}$, M_3 le point d'affixe z_3 tel que le quadrilatère $OM_1M_3M_2$ soit un parallélogramme.

   a. Dans cette question uniquement M a pour affixe $4 + \mathrm{i}$. Placer les points M, M_1, M_2, M_3.

   b. Exprimer z_3 en fonction de z.

   c. $OM_1M_3M_2$ est-il un losange ? Justifier.

   d. Vérifier que $z' - z = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}z_3$. En déduire que $MM' = \dfrac{1}{2}OM_3$.

3. Démontrer que les points M, M_1, M_2 et M_3 appartiennent à un même cercle de centre O si et seulement si $MM' = \dfrac{1}{2}OM$.

   Donner alors la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{M'OM}$.

Exercice 3 — 8 points

Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (20x + 10)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 1 cm).

1. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
3. Établir que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t = 0$, est $y(0) = 10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + \frac{1}{2}y = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$$

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie A est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

   a. On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0\,;\,+\infty[$ vérifiant $g(0) = 10$.

   Démontrer que la fonction $g - f$ est solution, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, de l'équation différentielle :

   $$(E') : y' + \frac{1}{2}y = 0$$

   b. Résoudre l'équation différentielle (E').

   c. Conclure.

3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.