

# Devoir surveillé de mathématiques

## Terminales S – Obligatoire

Mercredi 21 janvier 2009

Éléments de correction

### Exercice 1

1. Cf. cours.
2. Dessin
3.
  - a. On obtient  $z_{A'} = 5i = z_C$  et  $z_{B'} = -3 - 3i = z_D$ .
  - b.  $M(z)$  est invariant par  $f$  si et seulement si  $z' = z \Leftrightarrow z = (1 + 2i)z - 2 - 4i \Leftrightarrow 2iz = 2 + 2i \Leftrightarrow z = 2 - i$ . L'équation ayant une seule solution,  $f$  a un seul point invariant  $\Omega$  d'affixe  $\omega = 2 - i$ .
4.
  - a. On a  $z' - z = 2iz - 2 - 4i = -2i(2 - i - z)$ .
  - b. L'égalité ci-dessus donne :

$$\frac{z' - z}{2 - i - z} = -2i$$

On obtient donc :

$$- \frac{MM'}{\Omega M} = \left| \frac{z' - z}{2 - i - z} \right| = |-2i| = 2$$

$$- (\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}) = \arg\left(\frac{z' - z}{2 - i - z}\right) (2\pi) = \arg(-2i) (2\pi) = -\frac{\pi}{2} (2\pi)$$

- c. On en déduit que le triangle  $\Omega MM'$  est un triangle rectangle en  $M$ .

- d. On a  $|z_E|^2 = \sqrt{1+3} = 2$  puis  $\cos \theta_E = -\frac{1}{2}$  et  $\sin \theta_E = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{On en déduit } \theta_E = -\frac{2\pi}{3} (2\pi)$$

$$\text{Donc } z_E = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

Pour placer le point  $E$ , il suffit de construire le cercle de centre  $O$  et de rayon 2. Le point  $E$  est le point de ce cercle d'abscisse 1.

D'après les questions b. et c. on a  $EE' = 2\Omega E$  et  $(\overrightarrow{E\Omega}, \overrightarrow{EE'}) = -\frac{\pi}{2} (2\pi)$ . On construit donc la perpendiculaire en  $E$  à la droite  $(E\Omega)$  et on place sur cette droite le point  $E'$  tel que  $EE' = 2\Omega E$  et  $(\overrightarrow{E\Omega}, \overrightarrow{EE'}) = -\frac{\pi}{2} (2\pi)$

### Exercice 2

1. On pose  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$  avec  $x, y, x'$  et  $y'$  réels.

- a. Par définition :  $z' = \frac{1}{2}(z + i\bar{z})$ , c'est-à-dire :

$$x' + iy' = \frac{1}{2}(x + iy + i(x - iy)) = \frac{1}{2}(x + iy + ix + y) = \frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{2}(x + y)i \quad (1)$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient les égalités annoncées.

On en déduit que  $y' = x'$  donc que  $M'$  appartient à la droite d'équation  $y = x$ . Or  $O$  et  $A$  appartiennent aussi à cette droite, d'où  $M' \in (OA)$ .

- b.  $M = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x + y) \\ y = \frac{1}{2}(x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + y \\ 2y = x + y \end{cases} \Leftrightarrow x = y.$

L'ensemble cherché est donc la droite  $(OA)$ .

c. L'égalité (1) permet d'obtenir :  $z' - z = \dots = \frac{1}{2}(x - y)(-1 + i)$ .

On en déduit :

$$\frac{z' - z}{z_A} = \frac{1}{2}(x - y) \frac{-1 + i}{1 + i} = \frac{1}{2}(x - y) \frac{(-1 + i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \dots = \frac{1}{2}i(x - y)$$

Donc  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{MM'}) = \arg\left(\frac{1}{2}i(x - y)\right) (2\pi) = \frac{\pi}{2} (\pi)$  donc  $\overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{OA}$ .

2. a. Dessin

b. Par définition du point  $M_3$ ,  $\overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{OM_2}$ , donc  $z_3 - z_1 = z_2 - 0$ , ce qui donne :  $z_3 - iz = \bar{z}$ , c'est-à-dire  $z_3 = iz + \bar{z}$ .

c. On a :  $OM_1 = |z_1| = |iz| = |i| \times |z| = |z|$ ;

$$OM_2 = |\bar{z}| = |z|.$$

Le parallélogramme  $OM_1M_3M_2$  a deux côtés consécutifs de même longueur, c'est donc un losange.

$$d. z' - z = \frac{1}{2}(z + i\bar{z}) - z = \frac{1}{2}(z + i\bar{z} - 2z) = \frac{1}{2}(i\bar{z} - z).$$

$$\text{Par ailleurs, } \frac{1}{2}iz_3 = \frac{1}{2}i(iz + \bar{z}) = \frac{1}{2}(-z + i\bar{z}), \text{ on a donc bien } z' - z = \frac{1}{2}iz_3.$$

$$\text{On en déduit que } |z' - z| = \left| \frac{1}{2}iz_3 \right| = \frac{1}{2} \times |i| \times |z_3| = \frac{1}{2}|z_3|, \text{ c'est-à-dire que } MM' = \frac{1}{2}OM_3.$$

3. On a déjà  $OM = OM_1 = OM_2 = |z|$ , les points  $M$ ,  $M_1$  et  $M_2$  sont donc sur un même cercle de centre  $O$ .  $M_3$  appartient à ce cercle si et seulement si  $OM_3 = OM$  c'est-à-dire (d'après la question 2d) si et seulement si  $MM' = \frac{1}{2}OM$ .

Le triangle  $OMM'$  est rectangle en  $M'$ ; en effet  $M' \in (OA)$  et  $(MM') \perp (OA)$  (question 1), on a donc :

$$\sin \widehat{M'OM} = \frac{MM'}{OM} = \frac{\frac{1}{2}OM}{OM} = \frac{1}{2}$$

$$\text{On en déduit que } \widehat{M'OM} = \frac{\pi}{6}.$$

### Exercice 3

#### Partie A

1. Pour tout  $x$  de  $[0; +\infty[$ ,  $f(x) = 20xe^{-\frac{1}{2}x} + 10e^{-\frac{1}{2}x} = -40 \times -\frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x} + 10e^{-\frac{1}{2}x}$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}x = -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow -\infty} Xe^X = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x} = 0.$$

$$\text{De plus } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = 0.$$

$$\text{On en déduit : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

2.  $f$  est dérivable sur  $I = [0; +\infty[$  (composée et produit de fonctions dérivables) et, pour tout  $x$  de  $I$  :  $f'(x) = (20 - 10x - 5)e^{-\frac{1}{2}x} = (15 - 10x)e^{-\frac{1}{2}x}$  qui est du signe de  $(15 - 10x)$  car  $e^{-\frac{1}{2}x} > 0$ . Cette dérivée s'annule en  $\frac{3}{2}$ . D'où le tableau de variations :

| $x$                  | 0 | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |
|----------------------|---|---------------|-----------|
| Signe de $f'(x)$     | + | 0             | -         |
| Variations de $f(x)$ |   |               |           |

3. Sur  $]0; \frac{3}{2}]$ ,  $f(x) > 10$ , donc l'équation  $f(x) = 10$  n'a pas de solution. Sur l'intervalle  $]\frac{3}{2}; +\infty[$ , on applique (en le rédigeant) le théorème de la bijection. Il existe donc un réel unique  $\alpha \in ]\frac{3}{2}; +\infty[$  tel que  $f(x) = 10$ . La calculatrice donne  $\alpha \approx 4,673$ .

## Partie B

1. On a effectivement  $f(t) + \frac{1}{2}f'(t) = (15 - 10t)e^{-\frac{1}{2}t} + (10t + 5)e^{-\frac{1}{2}t} = 20e^{-\frac{1}{2}t}$ . Donc  $f$  est une solution de (E) sur  $[0; +\infty[$ .
2. a.  $\forall t \in ]0; +\infty]$ ,  $(g - f)'(t) + \frac{1}{2}(g - f)(t) = g'(t) - f'(t) + \frac{1}{2}g(t) - \frac{1}{2}f(t) = \left(g'(t) + \frac{1}{2}g(t)\right) - \left(f'(t) + \frac{1}{2}f(t)\right) = 20e^{-\frac{1}{2}t} - 20e^{-\frac{1}{2}t} = 0$   
Conclusion : la fonction  $g - f$  est solution, sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ , de l'équation différentielle :  $(E') \ y' + \frac{1}{2}y = 0$ .
- b. Les solutions de l'équation  $(E')$  sont les fonctions  $t \mapsto Ce^{-t/2}$ .
- c. La fonction  $(g - f)$  est l'une de ces solutions. Donc  $g(t) = f(t) + Ce^{-t/2}$ . Or  $g(0) = f(0) = 10$  donc  $C = 0$ . Ainsi  $g = f$ .  
Conclusion : l'équation différentielle (E) a une solution unique vérifiant  $y'(0) = 10$ , c'est la fonction  $f$  de la **partie A**.
3. D'après la question 3. de la partie A, cela correspond à la valeur  $\alpha$  telle que  $f(\alpha) = 10$ . On a vu que  $\alpha \approx 4,673\text{h} \approx 4\text{ h }41\text{min}$ .