Devoir de Mathématiques N^o 6 (2 heures)

Le barême est approximatif.

Exercice 1 (5 points) :

1. (a) Résoudre l'équation différentielle
$$(E) : y' + 2y = 0$$
   (b) En déduire les solutions de $y'' + 2y' = 0$.
2. (a) Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = a\mathrm{e}^{-x} + b$ soit solution de
$$(E') : y' + 2y = 2\mathrm{e}^{-x} - 6$$
   (b) Démontrer que f est solution de (E') si et seulement si $f - g$ est solution de (E).
   (c) En déduire la résolution de l'équation (E').
3. Déterminer la solution s de (E') vérifiant $s(\ln 2) = -\dfrac{7}{4}$.

Exercice 2 (4 points) :

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ vérifiant l'équation différentielle
$$(E) \quad : \qquad xf'(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2.$$

1. (a) Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle $(E') \quad : \quad y' = 2y + 8$.
   (b) Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x) = xh(x)$ est solution de (E).
2. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E).
3. Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point $\mathrm{A}(\ln 2\,;\,0)$? Si oui la préciser.

Exercice 3 (5 points) :

f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}$$
et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.
   (a) Etudiez les variations de g et en déduire son signe.
   (b) Justifier alors le domaine de définition de f.
2. (a) Calculez les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Interprétez graphiquement les résultats obtenus.
   (b) Etudiez les variations de f et dressez son tableau de variations.
   (c) Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Etudiez la position relative de $\mathscr{C}$ et de T.

Exercice 4 (2 points) :

Résoudre les équation suivantes :

1. $2iz + 3i = \overline{z} + 1$
2. $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

Exercice 5 (3 points) :

Soit $z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$ et $z_2 = 2 - 2i$.

1. Déterminer une forme exponentielle de z_1.
2. Déterminer une forme exponentielle de z_2.
3. Donner la forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$.
4. Donner une forme exponentielle de $\dfrac{z_1}{z_2}$ et en déduire la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 6 (1 points) :

Ecrivez sous forme exponentielle.

1. $a = -ie^{i\frac{\pi}{3}}$
2. $b = (1 + i\sqrt{3})^4$