Devoir de Mathématiques N^o 3 (2 heures)

Exercice 1 :

Résoudre

1. $\ln\left(\dfrac{5-4x}{x+3}\right)=1$
2. $\dfrac{1}{2}\ln(x+3)=\ln(x+1)$.

Exercice 2 :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x)=2\sin(5x)+3\sin(3x)+4\sin x$.
2. $f(x)=x(x^2-6)\sqrt{x^2-6}$ sur $D=]\sqrt{6};+\infty[$.
3. $f(x)=x^2(x^3-\pi)^4$ sur $D=\mathbb{R}$.
4. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x}$ sur $D=]0;1[$.
5. $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin^4 x}$ sur $D=]0;\pi[$.

Exercice 3 :

Soit $f(x)=\cos^3 x$.

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $f(x)=\cos x-\cos x\sin^2 x$.
2. En déduire la primitive de F telle que $F(0)=0$.

Exercice 4 : Restitution organisée de connaissances

Prérequis : • *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I, une fonction F dérivable sur I telle que pour tout $x\in I$, $F'(x)=f(x)$.*
• *Soit f une fonction continue sur un intervalle I alors f admet des primitives sur I.*
Montrer les résultats suivant : Soit f continue sur un intervalle I et F et G deux primitives de f alors F et G diffèrent d'une constante.

Exercice 5 :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{|x-3|}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.
2. f est-elle dérivable en 3 ?

Exercice 6 :

Déterminer les dérivés des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\ln(\tan x)$ pour $x\in]0;\dfrac{\pi}{2}[$.
2. $f(x)=x(\ln x)^3$ pour $x\in\mathbb{R}_+^\star$.

Exercice 7 :

Soit E la fonction partie entière. On rappelle que pour tout $k\in\mathbb{Z}$, si $I_k=[k;k+1[$ on a alors $E(x)=k$ pour tout $x\in I_k$.
Soit $f(x)=x-xE(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$.

1. Quelle est l'expression de f pour $x\in I_0$? pour $x\in I_1$?
2. f est-elle contine en 0 ? dérivable en 0 ?

Exercice 8 :

Déterminer les limites de la fonction f à l'endroit indiqué.

1. $f(x)=(\ln x)^2$ en 0 et $+\infty$.
2. $f(x)=\dfrac{2\ln x+7}{x+\ln x}$ en $+\infty$.
3. $f(x)=\dfrac{\ln(1-4x)}{x}$ en 0.
4. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\tan x}$ en $x=0$.

Exercice 9 :

Soit f définie sur $D=\mathbb{R}_+^\star$ par $f(x)=x\ln x-2x+1$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de D.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que $f(x)=0$ admet une solution α unique α sur $[e;+\infty[$. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.