Devoir de Mathématiques N^o 3 (2 heures)

Exercice 1 :

Résoudre

1. $\ln\left(\dfrac{5-4x}{x+3}\right) = 1$
2. $\dfrac{1}{2}\ln(x+3) = \ln(x+1)$.

Exercice 2 :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x) = 2\sin(5x) + 3\sin(3x) + 4\sin x$ sur $D = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = x(x^2-6)\sqrt{x^2-6}$ sur $D = [\sqrt{6}; +\infty[$.
3. $f(x) = x^2(x^3-\pi)^4$ sur $D = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x}$ sur $D =]0;1[$.
5. $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^4 x}$ sur $D =]0;\pi[$.

Exercice 3 :

Soit $f(x) = \cos^3 x$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$.
2. En déduire la primitive de F telle que $F(0) = 0$.

Exercice 4 : Restitution organisée de connaissances

Prérequis : • *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I, une fonction F dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.*
• *Soit f une fonction continue sur un intervalle I alors f admet des primitives sur I.*
Montrer les résultats suivant : Soit f continue sur un intervalle I et F et G deux primitives de f alors F et G diffèrent d'une constante.

Exercice 5 :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{|x-3|}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
2. f est-elle dérivable en 3 ?

Exercice 6 : (spécialité)

1. Pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que 4 divise $81n^2 - 1 \iff n$ est un nombre impair.
2. Est-il vrai que pour tout entier $n > 2$, 12 divise $A_n = n(n+1)(n+3)$?

Exercice 7 :

Soit E la fonction partie entière. On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, si $I_k = [k; k+1[$ on a alors $E(x) = k$ pour tout $x \in I_k$.
Soit $f(x) = x - xE(x)$; $x \in \mathbb{R}$.

1. Quelle est l'expression de f pour $x \in I_0$? pour $x \in I_1$?
2. f est-elle contine en 0 ? dérivable en 0 ?

Exercice 8 :

Déterminer les limites de la fonction f à l'endroit indiqué.

1. $f(x) = (\ln x)^2$ en 0 et $+\infty$.
2. $f(x) = \dfrac{2\ln x + 7}{x + \ln x}$ en $+\infty$.
3. $f(x) = \dfrac{\ln(1-4x)}{x}$ en 0.
4. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\tan x}$ en $x = 0$.

Exercice 9 :

Soit f définie sur $D = \mathbb{R}_+^\star$ par $f(x) = x\ln x - 2x + 1$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de D.
2. Dresser le tablearu de variation de f.
3. Montrer que $f(x) = 0$ admet une solution α unique α sur $[e; +\infty[$. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.