

Devoir de Mathématiques N° 2 (1 heure)



La rédaction doit être soignée, la calculatrice est autorisée.

Exercice 1 : 3 points

Soit $f(x) = \frac{(\cos(x))^{15} - 1}{x}$ pour $x \neq 0$. Etudier la limite de f en 0.

Exercice 2 : 3 points

Soit f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{2x^2 + 1}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

f est-elle dérivable en 0? continue en 0?

Exercice 3 : 2 points

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin^3 x$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f''(x) + 9f(x) = 6 \sin x$$

Exercice 4 : 12 points

1. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = x^3 - 3x - 4$$

(a) Dresser le tableau de variation complet de g .

(b) Démontrer que $g(x) = 0$ admet une solution unique sur \mathbb{R} que l'on appellera α . Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α .

(c) Quel est le signe de g sur $]1; +\infty[$?

2. Soit f définie sur $D =]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$$

(a) Etablir que f' et g ont même signe sur D .

(b) Etablir les limites de f aux bornes de D .

(c) Construire le tableau de variation de f .

(d) Déterminer un encadrement de $f(\alpha)$.

(e) Etablir que $\Delta : y = x + 2$ est asymptote oblique à \mathcal{C} courbe représentative de f . Déterminer la position relative de \mathcal{C} et Δ .