Durée : 4 heures | Semaine du 2 au 6 mars 2009

Bac Blanc

Mathématiques Spécialité

La calculatrice est autorisée

Exercice 1 Spécialité (5 points) :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

On note r_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{5}$.

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3y = 5(15 - x)$.
2. Soit I le point d'affixe 1. On considère un point A mobile sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O. Sa position initiale est en I.
   On appelle d la distance, exprimée en centimètres, qu'a parcourue le point A sur le cercle $\mathcal{C}$ après avoir subi p rotations r_1 et q rotations r_2 (p et q étant des entiers naturels).
   On convient que lorsque A subit la rotation r_1 (respectivement r_2), il parcourt une distance de $\frac{\pi}{3}$cm (respectivement $\frac{\pi}{5}$ cm).
   Déterminer toutes les valeurs possibles de p et q pour lesquelles le point A a parcouru exactement deux fois et demie la circonférence du cercle $\mathcal{C}$ à partir de I.

Partie B

On note h_1 l'homothétie de centre O et de rapport 4 et h_2 l'homothétie de centre O et de rapport -6. On pose $s_1 = r_1 \circ h_1$ et $s_2 = r_2 \circ h_2$.

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de s_1 et s_2.
2. On pose :
   $S_m = s_1 \circ s_1 \cdots \circ s_1$ (composée de m fois s_1, m étant un entier naturel non nul),
   $S'_n = s_2 \circ s_2 \cdots \circ s_2$ (composée de n fois s_2, n étant un entier naturel non nul), et $f = S'_n \circ S_m$.
   (a) Justifier que f est la similitude directe de centre O, de rapport $2^{2m+n} \times 3^n$ et d'angle $m\frac{\pi}{3} + n\frac{6\pi}{5}$.
   (b) f peut-elle être une homothétie de rapport 144 ?
   (c) On appelle M le point d'affixe 6 et M′ son image par f.
   Peut-on avoir $\mathrm{OM}' = 240$?
   Démontrer qu'il existe un couple d'entiers naturels unique $(m,\ n)$ tel que $\mathrm{OM}' = 576$.
   Calculer alors la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{OM}'}\right)$.

Exercice 2 (4 points) :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = & 1 \\ f(x) = & \frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1 \quad \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. (a) Étudier la dérivabilité de f en 0.
   (b) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$, f' désignant la fonction dérivée de f.
3. Etudier le sens de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$, puis dresser son tableau de variations.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 3 (4 points) :

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $D = \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$:

$$(E) \quad y' + (1 + 2\tan x)y = \cos^2 x \qquad \text{et} \qquad (E_0) \quad y' + y = 1.$$

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0).
2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur D et telles que

$$f(x) = g(x)\cos^2 x.$$

   Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de (E_0).
3. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

Exercice 4 (7 points) :

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Cette courbe est donnée en annexe.

Partie A

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
2. (a) Montrer que, pour tout réel m de $\left]0\ ;\ \frac{1}{\mathrm{e}}\right[$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.
   (b) Dans le cas où $m = \frac{1}{4}$, on nomme α et β les solutions de l'équation précédente (avec $\alpha < \beta$).
   Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
   Placer α et β sur l'annexe de l'exercice.
   (c) Résoudre l'équation $f(x) = m$ dans le cas où $m = 0$ et $m = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 &= \alpha \\ u_{n+1} &= u_n \mathrm{e}^{-u_n}, \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

   où α est le réel défini à la question **A. 2. b.**
   (a) Représenter sur l'annexe les 3 premiers termes de la suite (u_n).
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
   (c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (d) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.
2. On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln u_n$.
   (a) Montrer que, pour tout n entier naturel, on a $u_n = w_n - w_{n+1}$.
   (b) On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   Montrer que $S_n = w_0 - w_{n+1}$.
   (c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme v_0 ($v_0 > 0$) et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n \mathrm{e}^{-v_n}$.
   Existe-t-il une valeur de v_0 différente de α telle que, pour tout $n \geqslant 1$, on ait $u_n = v_n$?
   Si oui, préciser laquelle.

Annexe de l'exercice 4