

Bac Blanc

Mathématiques Obligatoire

La calculatrice est autorisée

Exercice 1 (5 points) :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On pourra se servir du repère en annexe.

Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.

- (a) Déterminer l'affixe du point B_1 image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.
- (b) Déterminer l'affixe du point B' image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
Placer les points A, B et B' .
- On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = (1 + i)z + 1.$$

- Montrer que B a pour image B' par f .
- Montrer que A est le seul point invariant par f .
- Etablir que pour tout nombre complexe z distinct de i ,

$$\frac{z' - z}{i - z} = -i.$$

Interpréter ce résultat en termes de distances puis en termes d'angles.
En déduire une méthode de construction de M' à partir de M , pour M distinct de A.

- (a) Donner la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z - 2| = \sqrt{2}$.

- Démontrer que $z' - 3 - 2i = (1 + i)(z - 2)$.

En déduire que si le point M appartient à Σ_1 , alors son image M' par f appartient à un cercle Σ_2 , dont on précisera le centre et le rayon.

- Tracer Σ_1 et Σ_2 sur la même figure que A, B et B' .

Exercice 2 (4 points) :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1 \quad \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
- (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- (a) Étudier la dérivabilité de f en 0.
- (b) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$, f' désignant la fonction dérivée de f .
- Etudier le sens de variations de f sur $[0; +\infty[$, puis dresser son tableau de variations.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 3 (4 points) :

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $D =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$:

$$(E) \quad y' + (1 + 2 \tan x)y = \cos^2 x \quad \text{et} \quad (E_0) \quad y' + y = 1.$$

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) .
2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur D et telles que

$$f(x) = g(x) \cos^2 x.$$

Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de (E_0) .

3. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

Exercice 4 (7 points) :

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = xe^{-x}.$$

On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Cette courbe est donnée en annexe.

Partie A

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
(b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
2. (a) Montrer que, pour tout réel m de $]0 ; \frac{1}{e}[$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.

- (b) Dans le cas où $m = \frac{1}{4}$, on nomme α et β les solutions de l'équation précédente (avec $\alpha < \beta$).

Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .

Placer α et β sur l'annexe de l'exercice.

- (c) Résoudre l'équation $f(x) = m$ dans le cas où $m = 0$ et $m = \frac{1}{e}$.

Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par

$$\begin{cases} u_0 &= \alpha \\ u_{n+1} &= u_n e^{-u_n}, \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

où α est le réel défini à la question **A. 2. b.**

- (a) Représenter sur l'annexe les 3 premiers termes de la suite (u_n) .
- (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.
- (c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
- (d) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

2. On considère la suite (w_n) définie sur \mathbb{N} par $w_n = \ln u_n$.

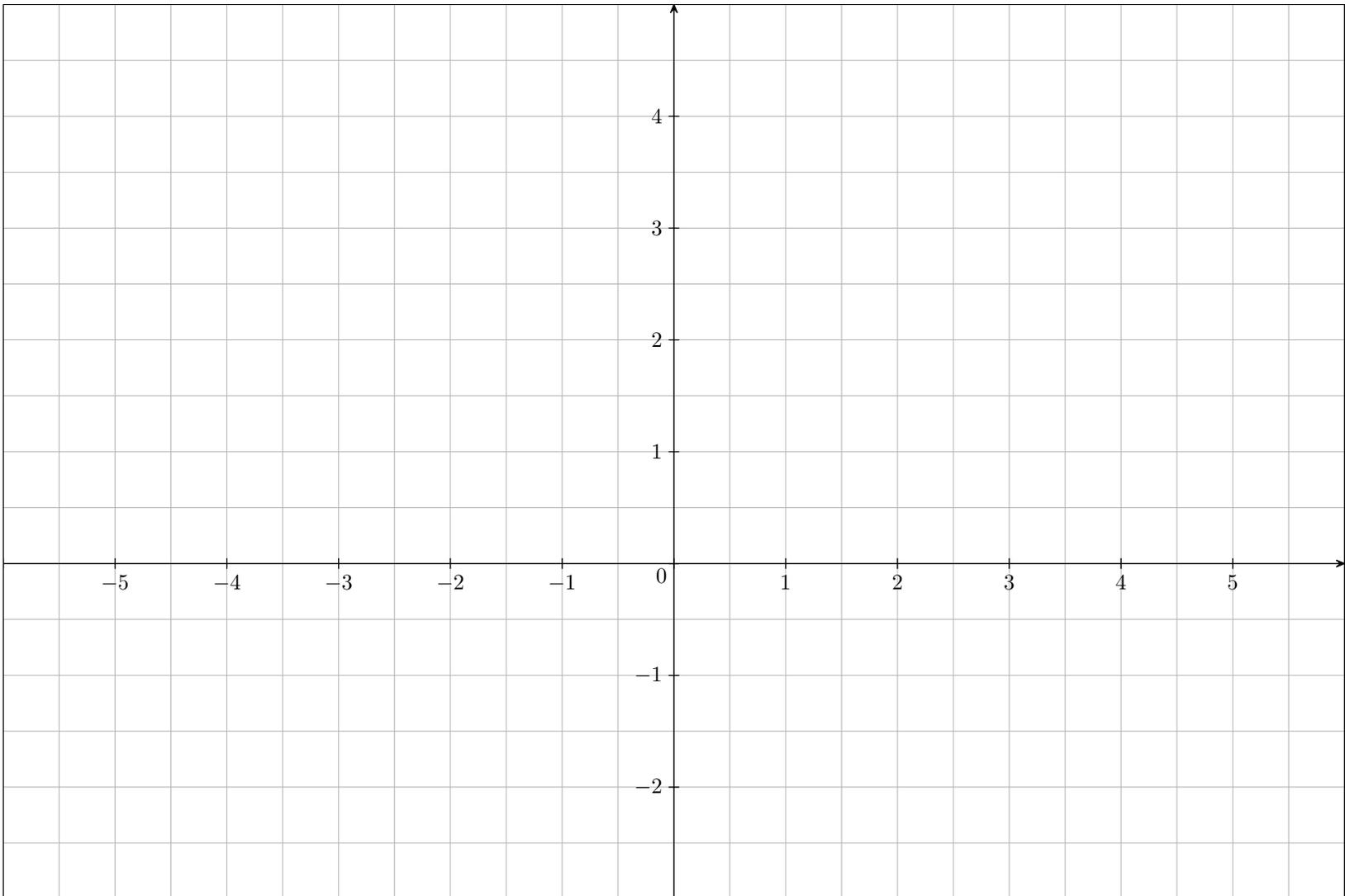
- (a) Montrer que, pour tout n entier naturel, on a $u_n = w_n - w_{n+1}$.
- (b) On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
Montrer que $S_n = w_0 - w_{n+1}$.
- (c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

3. On considère la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par son premier terme v_0 ($v_0 > 0$) et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = v_n e^{-v_n}$.

Existe-t-il une valeur de v_0 différente de α telle que, pour tout $n \geq 1$, on ait $u_n = v_n$?

Si oui, préciser laquelle.

Annexe de l'exercice 1



Annexe de l'exercice 4

