Devoir de Mathématiques N^o 6 (2 heures)

Le sujet est recto-verso. Les exercices peuvent être traités dans le désordre. Le barême est approximatif.

Exercice 1 (5 points) :

Chaque question est indépendante des autres.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$
$$e^x - 4 + 3e^{-x} \geq 0$$
2. Déterminer les limites suivantes :
   (a) $g(x) = x^{\frac{1}{3}} \ln x$ en 0.
   (b) $h(x) = \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$ en 0.
3. Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$f(x) = \ln(e^{3x} + x^2)$$
   et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
   Montrer que la droite Δ d'équation $y = 3x$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$.

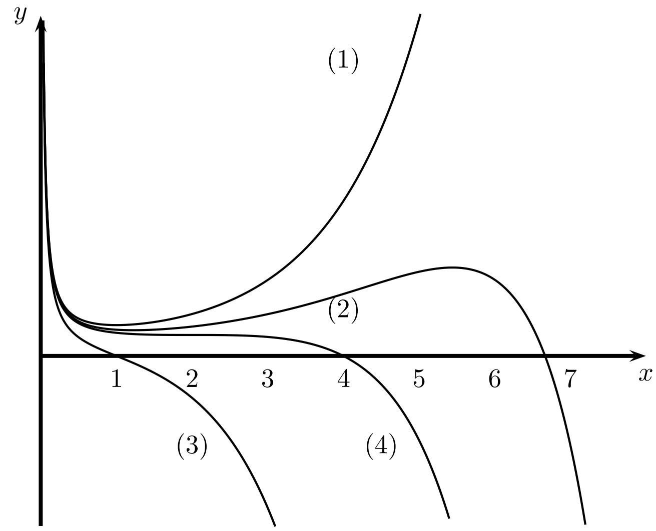
Exercice 2 (2 points) :

1. Résoudre l'équation différentielle
$$y' - 3y = 0 \tag{E}$$
2. En déduire les solutions de
$$y'' - 3y' = 0 \tag{F}$$

Exercice 3 (6 points) :

On considère l'équation différentielle (E) : $y - y' = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ et on cherche l'ensemble des solutions de cette équation définies sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. (a) Démontrer que la fonction u définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $u(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ est solution de (E).
   (b) Démontrer qu'une fonction v définie sur $]0\,;\,+\infty[$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $v - u$, définie sur $]0\,;\,+\infty[$, est solution de l'équation différentielle $y - y' = 0$.
   (c) En déduire toutes les solutions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ de l'équation (E).
2. Pour tout réel k négatif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :
$$f_k(x) = \frac{kx+1}{x}\mathrm{e}^x.$$
   (a) Déterminer les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.
   (b) Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et déterminer le nombre de solutions sur $]0\,;\,+\infty[$ de l'équation $f'_k(x) = 0$ suivant les valeurs de k.
3. On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
   On a tracé sur le graphique ci-joint les courbes $\mathcal{C}_{-1}$, $\mathcal{C}_{-0,25}$, $\mathcal{C}_{-0,15}$ et $\mathcal{C}_0$.
   En utilisant la deuxième question, reconnaître chaque courbe (les réponses doivent être justifiées).



Exercice 4 (7 points) :

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.
En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille.
Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000).
D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad y' = -\frac{1}{20}y(3 - \ln y).$$

1. Démontrer l'équivalence suivante : Une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(t) = -\dfrac{1}{20}f(t)[3 - \ln(f(t))]$ si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$,
$g'(t) = \dfrac{1}{20}g(t) - \dfrac{3}{20}$.
2. Donner la solution générale de l'équation différentielle :
$$\text{(H)} \qquad z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}.$$
3. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$
$$f(t) = \exp\left[3 + C\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right].$$
(la notation exp désigne la fonction exponentielle naturelle $x \mapsto \mathrm{e}^x$).
4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par :
$$f(t) = \exp\left[3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right].$$
   (a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (b) Déterminer le sens de variation de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Résoudre dans $[0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0,02$.
   Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?