Devoir de Mathématiques N^o 5 (2 heures)

Le sujet est recto-verso. Les exercices peuvent être traités dans le désordre. Le barême est approximatif.

Exercice 1 (1,5 points) :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$ sur $I =]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}[$.
2. $f(x) = \dfrac{e^x}{(2e^x+1)^2}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 2 (2,5 points) :

Résoudre l'inéquation suivante :

$$2\ln^2(x) - \ln x - 3 < 0$$

Exercice 3 (3 points) :

Déterminer les limites suivantes :

1. $f(x) = x(1-\ln x)$ en 0.
2. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2x}$ en 0, et $+\infty$.
3. $f(x) = e^{3x} - e^{2x}$ en $+\infty$.

Exercice 4 (2 points) :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - 1 + e^{-2x}$$

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x-1$ est asymptote oblique à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f.
3. Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

Exercice 5 (5,5 points) :

1. On considère la fonction u définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$u(x) = \ln x + x - 3$$

   (a) Etudier les variations de u et montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0;+\infty[$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

   (b) Etudier le signe de $u(x)$.

2. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = (1 - \frac{1}{x})(\ln x - 2)$$

   et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormé.

   (a) Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.

   (b) Calculer la dérivée f', montrer que le signe de f' est celui de u. En déduire le tableau de variations de f.

   (c) Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$.

   (d) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$

Exercice 6 (5,5 points) :

Soit f dédinie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x - \ln x} & \text{pour } x > 0 \\ -1 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. (a) Montrer que $\lim_{x \to 0} [f(x) + 1] = 0$ et en déduire que f est continue en 0.

   (b) Démontrer que f est dérivable en 0. Déterminer $f'(0)$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire ?

2. Etudier la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

3. Montrer que le signe de f' est celui de $(1 - \ln x)$. Dresser le tableau de variation de f.

4. Préciser le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses et déterminer l"équation de la tangente en ce point. Tracer sommairement la fonction f.