Devoir de Mathématiques N^o 3 (2 heures)

Le sujet est recto-verso. Les exercices peuvent être traités dans le désordre.

Exercice 1 (7 points) :

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 - 3x - 4$$

   (a) Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$ (limites comprises).

   (b) Démontrer que $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on notera α. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

   (c) En déduire le signe de $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Soit f définie sur $D =]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$$

   (a) Démontrer que f' a le même signe que g sur D.

   (b) Déterminer les limites de f aux bornes de D et dresser le tableau de variation de f.

   (c) Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x+2$ est asymptote oblique à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f. Etudier la position relative de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$.

Exercice 2 (5,5 points) :

Soit f la fonction définie sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ par

$$f(x) = x \tan x$$

1. Déterminer la limite de f aux bornes de I.
2. Démontrer que pour tout x appartenant à I,

$$f'(x) = \frac{2x + \sin(2x)}{2\cos^2 x}$$

3. Etudier la parité de f.
4. (a) Soit g définie sur $[0; \frac{\pi}{2}[$, par

$$g(x) = 2x + \sin(2x).$$

   Montrer en étudiant la dérivée de g que g est croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}[$.

   (b) En déduire le signe de g puis les variations de f sur $[0; \frac{\pi}{2}[$.

5. Dresser le tableau de variation de f sur I.

Exercice 3 (4 points) :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique en $+\infty$.
3. Etudier la position relative de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f et de Δ.

Exercice 4 (1,5 points) :

Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + |x|}{x} & \text{si } x \neq 0. \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Donner en cas de non dérivabilité une interprétation géométrique.

Exercice 5 (1 point) :

Montrer que la fonction $f : x \mapsto x|x|$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 : Restitution organisée de connaissances (1 point)

Prérequis :

- *Le théorème de la dérivée d'une fonction composée*
- *La fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ pour $x > 0$.*

Demonstration de cours : Soit u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle $\mathscr{D}$. Monter que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur $\mathscr{D}$ et que

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

Exercice 7 (1 point) :

Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 + x^2 - x - \dfrac{1}{3}$ telle que $F(1) = 2$.