Devoir de Mathématiques N^o 2 (55 minutes)

Exercice 1 (3 points) :

Soit f définie sur $I =]-\infty; 1[$ par

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{1-x}}$$

Justifier la dérivabilité de f sur I et calculer sa dérivée f' sur I.

Exercice 2 (4 points) :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi(x-x^2)}{3x^2+1}\right)$$

1. Déterminer les limites de f aux bornes du domaine de définition.
2. Déterminer la dérivée f' de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (7 points) :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$$

1. Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et dresser son tableau de variations.
2. Soit (E) l'équation
$$x^3 - 3x^2 = 5$$
Montrer que (E) admet une solution α unique sur $\mathbb{R}$ et donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
3. **(1 point hors barême)** Montrer *(en utilisant la définition de α)* que
$$\alpha^2 = \frac{5}{\alpha - 3}$$

Exercice 4 (6 points) :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & \text{si } x > 1 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer que f n'est pas dérivable en 1 ? Donner une interprétation géométrique en terme de demi-tangentes.