DS N° 4 : Autour de la continuité (2h)

I **(1 point)** Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$. On définit pour $x \in I \setminus \{a\}$:

$$t(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

et on rappelle que si f dérivable en a alors $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} t(x)$.

1. Montrer que pour $x \in I \setminus \{a\}$, on a :
$$f(x) = f(a) + (x - a)t(x)$$
2. Rappeller la définition de continuité de f en a.
3. En déduire que si f est dérivable en a alors f est continue en a.

II **(7 points)**

Partie A : étude du sens de variation d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

1. (a) On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Vérifier que, pour tout réel x, on a
$$f'(x) = \frac{2}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}$$
(b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie B : étude de la convergence d'une suite récurrente

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < \sqrt{3}$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge.
3. Déterminer sa limite.

Partie C : étude de la convergence de la somme de termes

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = u_0^2 + u_1^2 + ... + u_{n-1}^2$.

1. On rappelle que, pour tout entier naturel k, on a $1 \leqslant u_k \leqslant \sqrt{3}$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $n \leqslant S_n \leqslant 3n$.
2. En déduire les limites respectives de S_n et de $\dfrac{S_n}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

III **(10 points)** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x-3)\left(1-e^{-x}\right).$$

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2e^{x} + 2x - 5.$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$; donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
5. Justifier que $\alpha > 0$
6. Recopier et compléter les pointillés du programme écrit en langage Python ci-dessous, afin qu'il renvoie une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution α.

```
def g(x):
    return 2*exp(x)+2*x-5
def alpha():
  u=0
  while g(u) ......... 0 :
    u=.......
  return u
```

Partie B

1. Déterminer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = g(x)\,e^{-x}.$$

2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Montrer que

$$f(\alpha) = \frac{(2\alpha-3)^2}{2\alpha-5}.$$

Partie C

1. Soit h la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $h(x) = \dfrac{(2x-3)^2}{2x-5}$.
   Montrer que, pour tout $x \in [0\,;1]$:

$$h'(x) = \frac{2(2x-3)(2x-7)}{(2x-5)^2}.$$

2. Dresser le tableau de variations de h sur $[0\,;1]$.
3. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-1}.

IV✳ Pour $n \in \mathbb{N}^{\star}$, on définit $\begin{array}{rccc} f_n & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & e^{nx}-3 \end{array}$.

1. Montrer que f_n admet une unique racine α_n sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha_n \in [\frac{1}{n}; \frac{2}{n}]$.
2. En déduire que (α_n) converge et déterminer sa limite.