DS N° 4 : Autour de la continuité

I **(1 point)** Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$. On définit pour $x \in I \setminus \{a\}$:

$$t(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

et on rappelle que si f dérivable en a alors $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} t(x)$.

1. Montrer que pour $x \in I \setminus \{a\}$, on a :
$$f(x) = f(a) + (x - a)t(x)$$

Correction :

Pour $x \in I \setminus \{a\}$, on a $x - a \neq 0$ et :

$$\begin{aligned} f(a) + (x - a)t(x) &= f(a) + (x - a) \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= f(a) + f(x) - f(a) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

2. Rappeller la définition de continuité de f en a.

Correction :

f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

3. En déduire que si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Correction :

On suppose f dérivable en a, alors $\lim\limits_{x \to a} t(x) = f'(a)$ qui est un réel.
On a $\lim\limits_{x \to a}(x - a) = 0$, donc par produit $\lim\limits_{x \to a}(x - a)t(x) = 0 \times f'(a) = 0$.
Alors d'après la question 1. et par somme :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (f(a) + (x - a)t(x)) = f(a)$$

Donc f est continue en a.

II **(7 points)**

Partie A : étude du sens de variation d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

1. (a) On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Vérifier que, pour tout réel x, on a

$$f'(x) = \frac{2}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}$$

Correction :

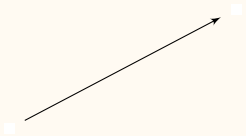
Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\sqrt{1+x^2} - 2x \times \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{1+x^2} - \dfrac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\ &= \frac{\dfrac{2(1+x^2)-2x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\ &= \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

(b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Correction :

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $1+x^2 > 0$ et $\sqrt{1+x^2} > 0$, donc par quotient $f'(x) > 0$.
Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	

Partie B : étude de la convergence d'une suite récurrente

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < \sqrt{3}$.

Correction :

Initialisation ($n = 0$) : Nous avons $u_0 = 1$
et $u_1 = f(1) = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1,414 < \sqrt{3} \approx 1,732$.
Donc on a bien $1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 < \sqrt{3}$.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons $1 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} < \sqrt{3}$ et montrons que c'est aussi vrai au rang suivant.
On a

$$1 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} < \sqrt{3}$$

et donc par application de f qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$f(1) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) < f(\sqrt{3})$$

Or $f(1) = \sqrt{2} \geqslant 1$ et $f(\sqrt{3}) = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \sqrt{3}$, donc

$$1 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} < \sqrt{3}.$$

L'hérédité est donc démontrée.
Conclusion : Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < \sqrt{3}$.

2. En déduire que la suite (u_n) converge.

Correction :

D'après la question précédente (u_n) est croissante et majorée par $\sqrt{3}$, donc par théorème, elle converge vers ℓ avec $1 \leqslant \ell \leqslant \sqrt{3}$.

3. Déterminer sa limite.

Correction :

On a

- $u_{n+1} = f(u_n)$.
- (u_n) converge vers $\ell \in [1; \sqrt{3}]$.
- f est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable) donc f continue en ℓ.

Alors par théorème du point fixe $f(\ell) = \ell$.
On a :

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\iff \frac{2\ell}{\sqrt{1+\ell^2}} = \ell \\ &\iff \frac{2}{\sqrt{1+\ell^2}} = 1 \qquad (\text{car } \ell \geqslant 1 \text{ donc } \ell \neq 0) \\ &\iff \sqrt{1+\ell^2} = 2 \\ &\iff 1+\ell^2 = 4 \\ &\iff \ell^2 = 3 \\ &\iff \ell = \sqrt{3} \qquad (\text{car } \ell > 0) \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$.

Partie C : étude de la convergence de la somme de termes

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \ldots + u_{n-1}^2$.

1. On rappelle que, pour tout entier naturel k, on a $1 \leqslant u_k \leqslant \sqrt{3}$.
   Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $n \leqslant S_n \leqslant 3n$.

Correction :

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $1 \leqslant u_k \leqslant \sqrt{3}$, donc par application de la fonction carré qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$1 \leqslant u_k^2 \leqslant 3$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En sommant ces inégalités pour k allant de 0 à $n-1$ (soit n inégalités), on obtient :

$$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ termes}} \leqslant u_0^2 + u_1^2 + \ldots + u_{n-1}^2 \leqslant \underbrace{3+3+\ldots+3}_{n \text{ termes}}$$

et donc $n \leqslant S_n \leqslant 3n$.

2. En déduire les limites respectives de S_n et de $\dfrac{S_n}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction :

Limite de S_n :
On a $S_n \geqslant n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc par théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
Limite de $\dfrac{S_n}{n^2}$:

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $n^2 > 0$, donc en divisant l'encadrement précédent par n^2 :

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{S_n}{n^2} \leqslant \frac{3}{n}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^2} = 0$.

III **(10 points)** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x-3)\left(1-e^{-x}\right).$$

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2e^x + 2x - 5.$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

Correction :

Limite en $+\infty$:
$\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-5) = +\infty$, donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
Limite en $-\infty$:
$\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x-5) = -\infty$, donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

2. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Correction :

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g'(x) = 2e^x + 2$$

Or $e^x > 0$, donc par somme $g'(x) > 0$, et ainsi g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
g	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$; donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Correction :

Sur $\mathbb{R}$:

- g est continue (comme somme de fonctions dérivables donc continues).
- g est strictement croissante.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $0 \in]-\infty;+\infty[$.

Alors d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$.
D'après la calculatrice : $g(0,62) \approx -0,04 < 0$ et $g(0,63) \approx 0,02 > 0$, donc $0,62 < \alpha < 0,63$.

4. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Correction :

g étant strictement croissante et $g(\alpha) = 0$, on déduit le tableau de signes de g :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

5. Justifier que $\alpha > 0$

Correction :

On a $g(0) = 2e^0 + 0 - 5 = -3 < 0$.
Ainsi $g(0) < 0 = g(\alpha)$, et comme g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $0 < \alpha$.

6. Recopier et compléter les pointillés du programme écrit en langage Python ci-dessous, afin qu'il renvoie une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution α.

```
1 def g(x):
2   return 2*exp(x)+2*x-5
3 def alpha():
4  u=0
5  while g(u) ......... 0 :
6   u=.......
7  return u
```

Correction :

On part de $u = 0 < \alpha$ (donc $g(u) < 0$) et on avance avec un pas de 10^{-2} tant que $g(u) < 0$, c'est-à-dire tant que $u < \alpha$:
La ligne 5 doit être : `while g(u) < 0 :`
La ligne 6 doit être : `u=u+0.01`
La fonction renvoie $0,63$, valeur approchée par excès de α à 10^{-2} près.

Partie B

1. Déterminer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = g(x)\,e^{-x}.$$

Correction :

Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\left(1 - e^{-x}\right) + (2x - 3) \times e^{-x} \\ &= 2 - 2e^{-x} + (2x - 3)e^{-x} \\ &= 2 + (2x - 5)e^{-x} \\ &= e^{-x}\left(2e^{x} + 2x - 5\right) \\ &= g(x)\,e^{-x} \end{aligned}$$

2. Dresser le tableau de variations de f.

Correction :

Comme $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ (étudié dans la partie A).
On déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
e^{-x}		$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

3. Montrer que
$$f(\alpha) = \frac{(2\alpha-3)^2}{2\alpha-5}.$$

Correction :

On sait par définition de α que $g(\alpha) = 0$, donc $2e^{\alpha} + 2\alpha - 5 = 0$, et donc en isolant e^{α}, on a :
$$e^{\alpha} = \frac{5-2\alpha}{2} \qquad \text{et donc} \qquad e^{-\alpha} = \frac{2}{5-2\alpha}$$
($5 - 2\alpha \neq 0$ car $e^{\alpha} > 0$.)
Alors :
$$\begin{aligned} f(\alpha) &= (2\alpha-3)\left(1-e^{-\alpha}\right) \\ &= (2\alpha-3)\left(1-\frac{2}{5-2\alpha}\right) \\ &= (2\alpha-3)\times\frac{5-2\alpha-2}{5-2\alpha} \\ &= (2\alpha-3)\times\frac{3-2\alpha}{5-2\alpha} \\ &= (2\alpha-3)\times\frac{-(2\alpha-3)}{-(2\alpha-5)} \\ &= \frac{(2\alpha-3)^2}{2\alpha-5} \end{aligned}$$

Partie C

1. Soit h la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $h(x) = \dfrac{(2x-3)^2}{2x-5}$.
Montrer que, pour tout $x \in [0\,;1]$:
$$h'(x) = \frac{2(2x-3)(2x-7)}{(2x-5)^2}.$$

Correction :

Pour $x \in [0;1]$, on a $2x - 5 \neq 0$ et :
$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{2\times 2(2x-3)\times(2x-5)-(2x-3)^2\times 2}{(2x-5)^2} \\ &= \frac{2(2x-3)\left[2(2x-5)-(2x-3)\right]}{(2x-5)^2} \\ &= \frac{2(2x-3)(4x-10-2x+3)}{(2x-5)^2} \\ &= \frac{2(2x-3)(2x-7)}{(2x-5)^2} \end{aligned}$$

2. Dresser le tableau de variations de h sur $[0\,;1]$.

Correction :

Sur $[0;1]$, on a

- $2x-3 \leqslant -1 < 0$
- $2x-7 \leqslant -5 < 0$
- $(2x-5)^2 > 0$

donc par produit et quotient $h'(x) > 0$ et donc h est strictement croissante sur $[0;1]$.
On a $h(0) = \dfrac{9}{-5} = -\dfrac{9}{5}$ et $h(1) = \dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3}$.

x	0	1
$h'(x)$	$+$	
h	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{1}{3}$

3. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-1}.

Correction :

On observe que $h(\alpha) = f(\alpha)$, et d'après la partie A, on sait que :

$$0,62 < \alpha < 0,63$$

avec $[0,62;0,63] \subset [0;1]$.
En conséquence par application de la fonction h qui est strictement croissante sur $[0;1]$ on a

$$h(0,62) < h(\alpha) < h(0,63)$$

Ce qui nous donne donc :

$$h(0,62) < f(\alpha) < h(0,63)$$

avec
$h(0,62) = \dfrac{(-1,76)^2}{-3,76} \approx -0,824$
et
$h(0,63) = \dfrac{(-1,74)^2}{-3,74} \approx -0,810$
Alors

$$-0,9 < f(\alpha) < -0,8$$

IV✳ Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{nx}-3 \end{array}$.

1. Montrer que f_n admet une unique racine α_n sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha_n \in [\frac{1}{n};\frac{2}{n}]$.

Correction :

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f_n'(x) = ne^{nx} > 0$ car $n > 0$, donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{nx} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{nx} = +\infty$ par composée, donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.
Sur $\mathbb{R}$:

- f_n est continue (car dérivable).
- f_n est strictement croissante.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -3$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ et $0 \in]-3;+\infty[$.

Alors d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha_n \in \mathbb{R}$.
On a de plus :

- $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^1 - 3 \approx -0,28 < 0$
- $f_n\left(\frac{2}{n}\right) = e^2 - 3 \approx 4,39 > 0$

Ainsi $f_n\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant f_n(\alpha_n) \leqslant f_n\left(\frac{2}{n}\right)$, et comme f_n est strictement croissante, on en déduit que $\alpha_n \in \left[\frac{1}{n};\frac{2}{n}\right]$.

2. En déduire que (α_n) converge et déterminer sa limite.

Correction :

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a d'après la question précédente :

$$\frac{1}{n} \leqslant \alpha_n \leqslant \frac{2}{n}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes (α_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.