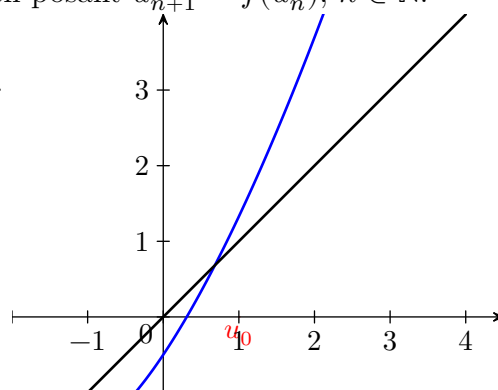


DS N° 1 : Récurrence, révisions suites et fonctions (1h)

I (1 point) Le graphique suivant représente une fonction f . Il est également donné un réel u_0 sur l'axe des abscisses. On définit (u_n) par récurrence en posant $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Représentez les 3 premiers termes u_0, u_1, u_2 sur l'axe des abscisses.
2. Conjecturez les variations de (u_n) .
.....
3. Conjecturez la limite éventuelle de (u_n) .
.....



II (4 points)

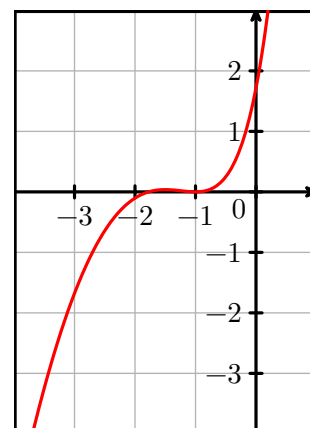
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)e^{x+1} - x^2 - 3x - 1$. On a tracé sur le graphe ci-contre la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f . Le but de l'exercice est de vérifier si f est strictement croissante.

1. On introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (e^{x+1} - 1)(2x + 3)$$

Dresser le tableau de signe de g .

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f' = g$, et en déduire le tableau de variations de f . f est-elle croissante ?
3. On note $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0. Déterminer l'équation réduite de $\mathcal{T}$.



III (6 points) La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.

Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 20 % chaque année.

Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année. On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année $2020 + n$.

On admet que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.

Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2 000 individus, ainsi $u_0 = 2\,000$.

1. Justifier que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 100.$$

2. Calculer u_1 puis u_2 .
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 500$.

- (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
 - (b) En déduire l'expression de (v_n) et (u_n) pour tout entier naturel n .
 - (c) Déterminer la limite de la suite (u_n) . En donner une interprétation dans le contexte de cet exercice.
4. On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil S (avec $S > 500$).

Dans le programme Python ci-contre, la variable n désigne le nombre d'années écoulées depuis 2020, la variable u désigne l'effectif de la population.

Compléter ce programme afin qu'il retourne le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous du seuil S .

```

1  def population(S) :
2      n=0
3      u=2000
4
5      while ..... :
6          u= ...
7          n = ...
8      return ...

```

(IV) (3 points) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2u_n - n + 2$$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^n + n - 1$.