

DS N° 1 : Réurrence, révisions suites et fonctions (1h)

I (1 point) Le graphique suivant représente une fonction f . Il est également donné un réel u_0 sur l'axe des abscisses. On définit (u_n) par récurrence en posant $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

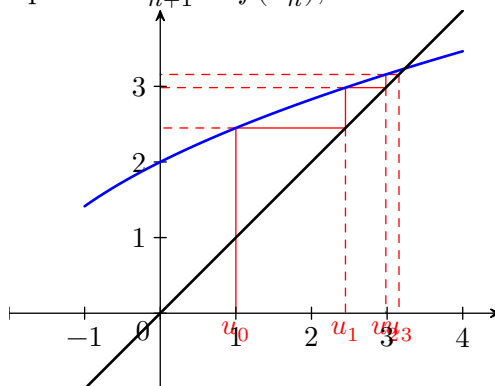
1. Représentez les 4 premiers termes u_0, u_1, u_2, u_3 sur l'axe des abscisses.

2. Conjecturez les variations de (u_n) .

.....

3. Conjecturez la limite éventuelle de (u_n) .

.....



II (4 points)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 3)e^{x-1} - x^2 + x + 1$. On a tracé sur le graphe ci-contre la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f . Le but de l'exercice est de vérifier si f est strictement croissante.

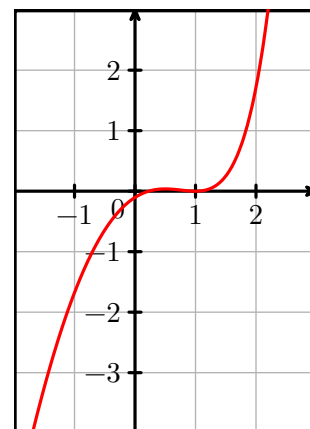
1. On introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (e^{x-1} - 1)(2x - 1)$$

Dresser le tableau de signe de g .

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f' = g$, et en déduire le tableau de variations de f . f est-elle croissante ?

3. On note $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0. Déterminer l'équation réduite de $\mathcal{T}$.



Correction :

1. Au vu du graphique, on conjecture que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. On va faire un tableau de signe mais il nous faut le signe de $e^{x-1} - 1$.

$$\begin{aligned} e^{x-1} - 1 \geq 0 &\iff e^{x-1} \geq e^0 \\ &\iff x - 1 \geq 0 \quad (\text{Car exp est strictement croissante}) \\ &\iff x \geq 1 \end{aligned}$$

On peut alors dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$e^{x-1} - 1$	−	−	0	+	
$2x - 1$	−	0	+	+	
$g(x)$	+	0	−	0	+

3. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

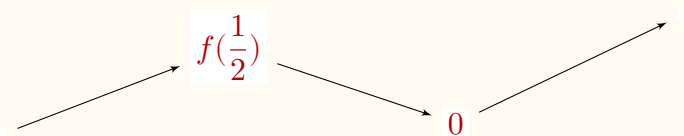
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{x-1} + (2x-3)e^{x-1} - 2x + 1 \\ &= e^{x-1}(2x-1) - (2x-1) \\ &= (2x-1)(e^{x-1} - 1) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Et ainsi l'égalité est démontrée.

On déduit alors le tableau de variations de f :

On a $f(1) = 0$ et

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= -2e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 \\ &= -2e^{-\frac{1}{2}} + \frac{5}{4} \\ &\simeq 0,04 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
Variations de f						

La fonction f n'est pas strictement croissante.

4. La tangente en 0 est donnée par $\mathcal{T} : y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

avec $f(0) = -3e^{-1} + 1$ et $f'(0) = 1 - e^{-1}$.

Alors on a :

$$\mathcal{T} : y = (1 - e^{-1})x - 3e^{-1} + 1.$$

III (6 points) La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.

Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10 % chaque année.

Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année. On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année $2020 + n$.

On admet que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.

Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2 000 individus, ainsi $u_0 = 2\,000$.

1. Justifier que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 100.$$

Correction :

Chaque année, la population diminue de 10%, donc elle est multipliée par $1 - 0,1 = 0,9$. À cette diminution s'ajoutent 100 individus réintroduits en fin d'année. Ainsi, au début de l'année suivante (u_{n+1}), on a :

$$u_{n+1} = 0,9 \times u_n + 100$$

2. Calculer u_1 puis u_2 .

Correction :

$$u_1 = 0,9 \times 2000 + 100 = 1800 + 100 = 1900$$

$$u_2 = 0,9 \times 1900 + 100 = 1710 + 100 = 1810$$

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1\,000$.

- (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

Correction :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1000 \\ &= (0,9u_n + 100) - 1000 \\ &= 0,9u_n - 900 \\ &= 0,9(u_n - 1000) \\ &= 0,9v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = 0,9$ avec $v_0 = u_0 - 1000 = 2000 - 1000 = 1000$.

- (b) En déduire que, l'expression de (v_n) et (u_n) pour tout entier naturel n .

Correction :

Par propriété des suites géométriques, $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = v_0 \times q^n = 1000 \times 0,9^n$. Ainsi :

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + 1000 \\ &= 1000 \times 0,9^n + 1000 \\ &= 1000(0,9^n + 1) \\ &= 1000(1 + 0,9^n) \end{aligned}$$

- (c) Déterminer la limite de la suite (u_n) . En donner une interprétation dans le contexte de cet exercice.

Correction :

On a $-1 < 0,9 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$. Alors par somme et produit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1000(1 + 0) = 1000$$

Interprétation : À long terme, la population se stabilisera autour de 1000 individus.

4. On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil S (avec $S > 1000$).

Dans le programme Python ci-contre, la variable n désigne le nombre d'années écoulées depuis 2020, la variable u désigne l'effectif de la population.

Recopier et compléter ce programme afin qu'il retourne le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous du seuil S .

```
1 def population(S) :  
2     n=0  
3     u=2000  
4  
5     while ..... :  
6         u= ...  
7         n = ...  
8     return ...
```

(IV) (3 points) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 1$$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 3^n + n$.

Correction :

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 3^n + n$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $3^0 + n = 1$. La propriété est initialisée.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_k = 3^k + k$, et montrons que $u_{k+1} = 3^{k+1} + k + 1$
On a :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 3u_k - 2k + 1 && \text{Par définition de } (u_n) \\ &= 3 \times (3^k + k) - 2k + 1 && \text{Par hypothèse de récurrence} \\ &= 3^{k+1} + k + 1 \end{aligned}$$

L'hérédité est donc démontrée.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 3^n + n$.