DS N° 13 : Probabilités (1h)

I *Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.*

Partie 1

Julien doit prendre l'avion ; il a prévu de prendre le bus pour se rendre à l'aéroport.
S'il prend le bus de 8 h, il est sûr d'être à l'aéroport à temps pour son vol.
Par contre, le bus suivant ne lui permettrait pas d'arriver à temps à l'aéroport.
Julien est parti en retard de son appartement et la probabilité qu'il manque son bus est de $0,8$.
S'il manque son bus, il se rend à l'aéroport en prenant une compagnie de voitures privées ; il a alors une probabilité de $0,5$ d'être à l'heure à l'aéroport.

On notera :

- B l'évènement : « Julien réussit à prendre son bus » ;
- V l'évènement : « Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol ».

1. Donner la valeur de $P_B(V)$.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Montrer que $P(V) = 0,6$.
4. Si Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol, quelle est la probabilité qu'il soit arrivé à l'aéroport en bus ? Justifier.

Partie 2

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé. On appelle cette pratique le surbooking.
Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager a 5 % de chance de ne pas se présenter à l'embarquement.
Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. On suppose que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. En moyenne, combien de passagers vont-ils se présenter à l'embarquement ?
3. Le programme ci-dessous, écrit en langage Python, utilise la fonction **binomiale**(i, n, p) créée pour l'occasion qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X = i)$ dans le cas où la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

```
def proba(k) :
    P=0
    for i in range(0,k+1) :
        P=P+binomiale(i,206,0.95)
    return P
```

   Déterminer, à 10^{-3} près, la valeur renvoyée par ce programme lorsque l'on saisit proba(200) dans la console Python.
   Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

4. La compagnie aérienne vend chaque billet à 250 euros.

   Si plus de 200 passagers se présentent à l'embarquement, la compagnie doit rembourser le billet d'avion et payer une pénalité de 600 euros à chaque passager lésé.

   On appelle :

   Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet ;

   C la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaire de la compagnie aérienne sur ce vol.

   On admet que Y suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	0,947 75	0,030 63	0,014 41	0,005 39	0,001 51	0,000 28	

   (a) Justifier la valeur correspondant à $P(Y = 1)$.

   (b) Compléter la loi de probabilité donnée ci-dessus en calculant $P(Y = 6)$.

   (c) Justifier que : $C = 51\,500 - 850Y$.

   (d) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire C sous forme d'un tableau.
   Calculer l'espérance de la variable aléatoire C à l'euro près.

   (e) Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.

5. La compagnie aime prendre des risques. Comment choisir le plus grand nombre possible n de billets vendus pour que la probabilité de refuser des personnes à l'embarquement soit inférieure à 0,2 ?