

DS N° 13 : Probabilités (4h)

I Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie 1

Julien doit prendre l'avion ; il a prévu de prendre le bus pour se rendre à l'aéroport.

S'il prend le bus de 8 h, il est sûr d'être à l'aéroport à temps pour son vol.

Par contre, le bus suivant ne lui permettrait pas d'arriver à temps à l'aéroport.

Julien est parti en retard de son appartement et la probabilité qu'il manque son bus est de 0,8.

S'il manque son bus, il se rend à l'aéroport en prenant une compagnie de voitures privées ; il a alors une probabilité de 0,5 d'être à l'heure à l'aéroport.

On notera :

- B l'évènement : « Julien réussit à prendre son bus » ;
- V l'évènement : « Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol ».

1. Donner la valeur de $P_B(V)$.

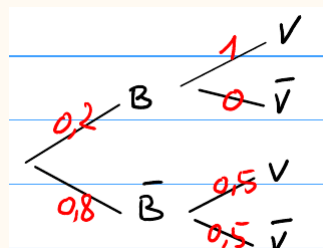
Correction :

D'après l'énoncé $P_B(V) = 1$

2. Représenter la situation par un arbre pondéré.

Correction :

D'après l'énoncé et la loi des noeuds, on a :



3. Montrer que $P(V) = 0,6$.

Correction :

B et \bar{B} forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(V) &= P(B \cap V) + P(\bar{B} \cap V) \\
 &= P(B) \times P_B(V) + P(\bar{B}) \times P_{\bar{B}}(V) \\
 &= 0,2 \times 1 + 0,8 \times 0,5 \\
 &= 0,2 + 0,4 \\
 &= 0,6
 \end{aligned}$$

4. Si Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol, quelle est la probabilité qu'il soit arrivé à l'aéroport en bus ? Justifier.

Correction :

4. On cherche $P_V(B)$:

$$\begin{aligned}P_V(B) &= \frac{P(V \cap B)}{P(V)} \\ &= \frac{P(B) \times P_B(V)}{P(V)} \\ &= \frac{0,2}{0,6} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Partie 2

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé. On appelle cette pratique le surbooking.

Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager a 5 % de chance de ne pas se présenter à l'embarquement.

Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. On suppose que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Correction :

On a une expérience de Bernoulli qui consiste à déterminer si un passager prend son vol ou non.

L'issue « succès » correspond au fait que le passager prend son vol, avec une probabilité $p = 0,95$.

On a $n = 206$ passagers qui prennent leur vol indépendamment les uns des autres.

L'expérience est donc assimilable à la répétition de manière indépendante de 206 expériences de Bernoulli. Par suite, la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale :

$$X \sim \mathcal{B}(206 ; 0,95)$$

2. En moyenne, combien de passagers vont-ils se présenter à l'embarquement ?

Correction :

L'espérance est donnée par :

$$\begin{aligned}E(X) &= n \times p \\ &= 206 \times 0,95 \\ &= 195,7\end{aligned}$$

En moyenne, 196 passagers se présentent.

3. Le programme ci-dessous, écrit en langage Python, utilise la fonction **binomiale**(i, n, p) créée pour l'occasion qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X = i)$ dans le cas où la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p .

```
def proba(k) :
    P=0
    for i in range(0,k+1) :
        P=P+binomiale(i,206,0.95)
    return P
```

Déterminer, à 10^{-3} près, la valeur renvoyée par ce programme lorsque l'on saisit proba(200) dans la console Python.

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Correction :

Si on tape proba(200), le programme calcule :

$$\begin{aligned} P &= P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = 200) \\ &= \sum_{k=0}^{200} P(X = k) \\ &= P(X \leq 200) \end{aligned}$$

D'après la calculatrice : $P(X \leq 200) \approx 0,948$.

La probabilité que tous les passagers qui se présentent volent (aucun passager n'est refusé) est de 0,948.

4. La compagnie aérienne vend chaque billet à 250 euros.
Si plus de 200 passagers se présentent à l'embarquement, la compagnie doit rembourser le billet d'avion et payer une pénalité de 600 euros à chaque passager lésé.

On appelle :

Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet ;

C la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaire de la compagnie aérienne sur ce vol.

On admet que Y suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	0,94775	0,03063	0,01441	0,00539	0,00151	0,00028	

- (a) Justifier la valeur correspondant à $P(Y = 1)$.

Correction :

Soit Y la variable aléatoire. $Y = 1$ signifie qu'un passager est refusé.

Cela correspond au cas où 201 personnes se présentent.

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= P(X = 201) \\ &= \binom{206}{201} \times 0,95^{201} \times 0,05^5 \\ &\approx 0,03063 \end{aligned}$$

- (b) Compléter la loi de probabilité donnée ci-dessus en calculant $P(Y = 6)$.

Correction :

La somme des probabilités doit être égale à 1.

$$P(Y = 6) = 1 - \sum_{k=0}^5 P(Y = k) \\ \approx 0,00003$$

- (c) Justifier que : $C = 51\,500 - 850Y$.

Correction :

La compagnie vend 206 billets pour un prix de $206 \times 250 = 51\,500$ €.

Elle dédommage Y personnes avec 850 € par personne.

Le chiffre d'affaires est donc :

$$C = 51\,500 - 850Y$$

- (d) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire C sous forme d'un tableau.
Calculer l'espérance de la variable aléatoire C à l'euro près.

Correction :

Loi de probabilité de C :

c_i	51500	50650	49800	48950	48100	47250	46400
$P(C = c_i)$	0,94775	0,03063	0,01441	0,00539	0,00151	0,00028	0,00003

L'espérance du chiffre d'affaires est :

$$E(C) = \sum c_i P(C = c_i) \\ = 51500 \times 0,94775 + 50650 \times 0,03063 + \dots \\ \approx 51\,429 \text{ €}$$

- (e) Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.

Correction :

Le chiffre d'affaires moyen avec surbooking est de 51 429 €. Sans surbooking (200 billets), il serait de $200 \times 250 = 50\,000$ €. La compagnie gagne donc 1 429 € de plus par vol.

5. La compagnie aime prendre des risques. Elle accepte de décider d'augmenter le surbooking. Comment choisir le plus grand nombre possible n de billets vendus pour que la probabilité de refuser des personnes à l'embarquement soit inférieure à 0,2 ?

Correction :

Soit n le nombre de billets vendus et $X \sim \mathcal{B}(n; 0,95)$.

On cherche n le plus grand possible tel que :

$$\begin{aligned}P(X \geq 201) \leq 0,2 &\iff 1 - P(X \leq 200) \leq 0,2 \\ &\iff P(X \leq 200) \geq 0,8\end{aligned}$$

D'après la calculatrice, on trouve $n = 208$.

Avec 208 billets vendus, la probabilité de refuser des personnes seraient de 0,82 approximativement.