DS N° 12 : Équations différentielles (30min)

(I) On considère l'équation différentielle sur $[0;+\infty[$:

$$\text{(E)} \quad ; \quad y' = \frac{1}{20}y(10-y)$$

Soit y une fonction y dérivable qui ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$. On pose $z = \dfrac{1}{y}$.

1. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_1) \quad : \quad z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

2. Résoudre l'équation (E_1)
3. En déduire les solutions de l'équation (E).
4. Déterminez la solution y qui satisfait $y(0) = 1$

(II) On considère l'équation différentielle

$$(E) : \qquad y' + 3y = \mathrm{e}^{-3t},$$

d'inconnue y, où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E') :\ y' + 3y = 0$.
2. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = at\mathrm{e}^{-3t}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
   Déterminer la valeur de a telle que la fonction u soit solution de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

(III✳) On considère une fonction u continue sur $\mathbb{R}$ et l'équation différentielle :

$$(E) : y' + u(x)y = 0$$

Soit U une primitive de la fonction u.
Montrer que les solutions de (E) sont exactement les fonctions définie sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$f(x) = C\mathrm{e}^{-U(x)} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

Appliquer ce résultat pour résoudre

$$(F) : y' - (1+2x)y = 0$$