DS N° 12 : Equations différentielles (30min)

I On considère l'équation différentielle sur $[0;+\infty[$:

$$(\mathrm{E}) \quad ; \quad y' = \frac{1}{20}y(10-y)$$

Soit y une fonction y dérivable qui ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$. On pose $z = \frac{1}{y}$.

1. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_1) \quad : \quad z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

Correction :

En se souvenant que si $z = \frac{1}{y}$, alors $z' = -\frac{y'}{y^2}$, on a en enchaînant les équivalences :

$$\begin{aligned} z \text{ solution de } (E_1) &\Longleftrightarrow z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20} \\ &\Longleftrightarrow -\frac{y'}{y^2} = -\frac{1}{2y} + \frac{1}{20} \\ &\Longleftrightarrow y' = \frac{y}{2} - \frac{y^2}{20} \\ &\Longleftrightarrow y' = \frac{1}{20}y(10-y) \\ &\Longleftrightarrow y \text{ solution de (E)} \end{aligned}$$

On a donc montré :

$$y \text{ solution de (E)} \Longleftrightarrow z \text{ solution de } (\mathrm{E}_1).$$

2. Résoudre l'équation (E_1)

Correction :

$$(\mathrm{E}_1) \quad : \quad z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{20}$.
Par propriété les solutions sont les fonctions de la forme :

$$z(x) = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

3. En déduire les solutions de l'équation (E).

Correction :

On a donc :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de (E)} &\iff z \text{ solution de } (\mathrm{E}_1). \\ &\iff z(x) = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10} \\ &\iff \frac{1}{y(x)} = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10} \\ &\iff y(x) = \frac{1}{C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10}} \end{aligned}$$

4. Déterminez la solution y qui satisfait $y(0) = 1$

Correction :

De plus :

$$\begin{aligned} y(0) = 1 &\iff \frac{1}{C + \frac{1}{10}} = 1 \\ &\iff C + \frac{1}{10} = 1 \\ &\iff C = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

En conséquence la solution cherchée est :

$$y(x) = \frac{10}{9\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + 1}.$$

II On considère l'équation différentielle

$$(E) \ : \qquad y' + 3y = \mathrm{e}^{-3t},$$

d'inconnue y, où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + 3y = 0$.

Correction :

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y' = ay$ avec $a = -3$. Par propriété les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(t) = C\mathrm{e}^{-3t}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

2. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = at\mathrm{e}^{-3t}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer la valeur de a telle que la fonction u soit solution de l'équation (E).

Correction :

Il suffit d'injecter u dans (E) pour trouver une condition sur a.
On a pour $t \in \mathbb{R}$:

$$u'(t) = a\mathrm{e}^{-3t} - 3at\mathrm{e}^{-3t} = a(1-3t)\mathrm{e}^{-3t}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} u \text{ solution de (E)} &\Longleftrightarrow u'(t) + 3u(t) = \mathrm{e}^{-3t} \\ &\Longleftrightarrow a(1-3t)\mathrm{e}^{-3t} + 3at\mathrm{e}^{-3t} = \mathrm{e}^{-3t} \\ &\Longleftrightarrow a\mathrm{e}^{-3t} = \mathrm{e}^{-3t} \\ &\Longleftrightarrow a = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $u(t) = t\mathrm{e}^{-3t}$ est une solution particulière de (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

Correction :

Par propriété les solutions (E) sont la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène (E').
D'après la question 1, la solution générale de (E') est $y(t) = C\mathrm{e}^{-3t}$ $(C \in \mathbb{R})$.
D'après la question 2, $u(t) = t\mathrm{e}^{-3t}$ est une solution particulière de (E).
Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est donné par :

$$f(t) = C\mathrm{e}^{-3t} + t\mathrm{e}^{-3t} = (C+t)\mathrm{e}^{-3t}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

III✳ On considère une fonction u continue sur $\mathbb{R}$ et l'équation différentielle :

$$(E) : y' + u(x)y = 0$$

Soit U une primitive de la fonction u.
Montrer que les solutions de (E) sont exactement les fonctions définie sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$f(x) = C\mathrm{e}^{-U(x)} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

Appliquer ce résultat pour résoudre

$$(F) : y' - (1+2x)y = 0$$

Correction :

D'abord les fonctions de la forme $f(x) = C\mathrm{e}^{-U(x)}$ sont bien solutions :
En effet, on a

$$\begin{aligned} f'(x) + u(x)f(x) &= -CU'(x)\mathrm{e}^{-U(x)} + u(x)C\mathrm{e}^{-U(x)} \\ &= -Cu(x)\mathrm{e}^{-U(x)} + u(x)C\mathrm{e}^{-U(x)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Et donc f solution de (E).
Réciproquement :

Soit f une solution quelconque. Montrons qu'elle est de la forme $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-U(x)}$.

On introduit une fonction φ définie par $\varphi(x) = f(x)\mathrm{e}^{U(x)}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= f'(x)\mathrm{e}^{U(x)} + f(x) \times U'(x)\mathrm{e}^{U(x)} \\
&= \mathrm{e}^{U(x)}\left(f'(x) + U'(x)f(x)\right) \\
&= \mathrm{e}^{U(x)}\left(f'(x) + u(x)f(x)\right) \\
&= 0 \qquad\qquad \text{(car } f \text{ solution de } (E))
\end{aligned}$$

Ainsi φ est une fonction constante et donc il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) = C$.
On a alors pour $x \in \mathbb{R}$: $f(x)\mathrm{e}^{U(x)} = C$ et donc $f(x) = C\mathrm{e}^{-U(x)}$.

Les solutions de (E) sont donc exactement les fonctions $f(x) = C\mathrm{e}^{-U(x)}$, $C \in \mathbb{R}$.

Résolution de (F).
$x \longmapsto 1 + 2x$ a pour primitive $x \longmapsto x + x^2$, donc les solutions de (F) sont les fonctions de la forme :
$f(x) = C\mathrm{e}^{x^2+x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.