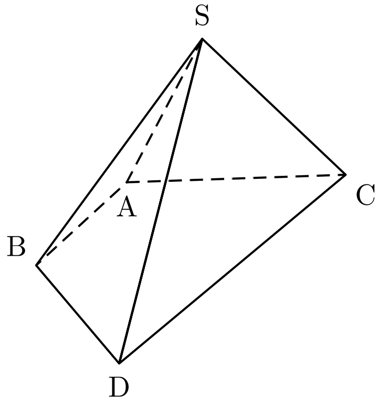
DS N°8 : Espace (1h20)

I (15 points)



Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points : $A(3~;~-1~;~1)$; $B(4~;~-1~;~0)$; $C(0~;~3~;~2)$; $D(4~;~3~;~-2)$ et $S(2~;~1~;~4)$.
Dans cet exercice on souhaite montrer que $SABDC$ est une pyramide à base $ABDC$ trapézoïdale de sommet S, afin de calculer son volume.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Correction :

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles : $\dfrac{1}{-3}\neq\dfrac{0}{4}$. Ainsi, les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. (a) Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

Correction :

A, B, C ne sont pas alignés, donc pour tester la coplanarité de A, B, C, D, il suffit de tester si $\overrightarrow{AD}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
On a $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\text{Et } A,\ B,\ C,\ D \text{ coplanaires } &\iff \exists\alpha,\beta \text{ tels que } \overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}.\\ &\iff \begin{cases}\alpha-3\beta=1\\ 0+4\beta=4\\ -\alpha+\beta=-3\end{cases}.\\ &\iff \begin{cases}\alpha=4\\ \beta=1\\ \alpha=4\end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires, et donc A, B, C, D sont coplanaires.

(b) Montrer que le quadrilatère $ABDC$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$.

Correction :

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$.

On a donc $\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{AB}$, donc ces vecteurs sont colinéaires et ainsi (AB) parallèle à (CD).
Le quadrilatère $ABDC$ a donc deux côtés opposés parallèles : c'est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$.

3. (a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2\ ;\ 1\ ;\ 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Correction :

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment un couple qui dirige le plan (ABC).
On a :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\times 1 + 1\times 0 + 2\times(-1) = 2+0-2 = 0,$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times(-3) + 1\times 4 + 2\times 1 = -6+4+2 = 0.$$

Ainsi $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$, donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

(b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

Correction :

Le plan (ABC) admet $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ comme vecteur normal, donc son équation est de la forme :

$$2x + y + 2z + d = 0. \qquad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

Le point $A(3;-1;1)$ appartient à ce plan, donc $6-1+2+d=0$ et finalement $d=-7$.
Ainsi une équation cartésienne de (ABC) est :

$$2x + y + 2z - 7 = 0.$$

(c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point S et orthogonale au plan (ABC).

Correction :

La droite Δ est orthogonale à (ABC), donc elle admet $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

Elle passe par $S(2;1;4)$, donc une représentation paramétrique est :

$$\Delta : \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+t \\ z = 4+2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}).$$

(d) On note I le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{8}{3}\right)$, puis montrer que $\mathrm{SI} = 2\,\mathrm{cm}$.

Correction :

On a :

$$I(x;y;z) \in \Delta \cap (ABC) \iff \begin{cases} 2x+y+2z-7=0 \\ x=2+2t \\ y=1+t \\ z=4+2t \end{cases}$$

$$\iff 2(2+2t)+(1+t)+2(4+2t)-7=0 \quad \text{Avec } (x,y,z), \text{ donné par } \Delta$$

$$\iff 9t+6=0$$

$$\iff t=-\frac{2}{3}$$

Alors $\begin{cases} x= = 2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3} \\ y=1+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3} \\ z=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3} \end{cases}$ et donc $I\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$.

On a $\overrightarrow{SI}\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$, donc $SI^2=\frac{16}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}=\frac{36}{9}=4$. Et donc $SI=2\,\text{cm}$

4. (a) Vérifier que le projeté orthogonal H du point B sur la droite (CD) a pour coordonnées $H(3\,;\,3\,;\,-1)$ et montrer que $HB=3\sqrt{2}$ cm.

Correction :

On doit ici vérifier deux points :

- $H \in (CD)$
- $(BH)\perp(CD)$

On a $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CH}$ et donc $H\in(CD)$.

D'autre part : $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CD}=-4+4=0$ donc $\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{CD}$.

Ainsi $H(3;3;-1)$ est bien le projeté orthogonal du point B sur la droite (CD).

On a $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc $BH^2=1+16+1=18$ et donc $BH=3\sqrt{2}$cm.

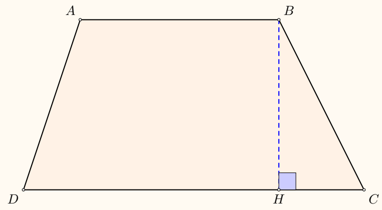
(b) Calculer la valeur exacte de l'aire du trapèze $ABDC$.

Correction :

L'aire d'un trapèze est donnée par $\mathcal{A}=\frac{b+B}{2}\times h$, où b et B sont les longueurs des bases et h la hauteur.
Ici d'après la question 2b, les bases sont $[AB]$ et $[CD]$.
On a :

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

donc $AB^2 = 2$ et $CD^2 = 32$
donc $AB = \sqrt{2}$ et $CD = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.



La hauteur h du trapèze à été calculée précédemment puisque H le projeté orthogonal du point B sur la droite (CD).
On a $h = HB = 3\sqrt{2}$ cm.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(ABDC) &= \frac{AB + CD}{2} \times HB \\
&= \frac{\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} \\
&= \frac{5\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = \frac{5 \times 3 \times 2}{2} \\
&= 15 \text{ cm}^2.
\end{aligned}$$

Donc l'aire du trapèze $ABDC$ est 15 cm^2.

5. Déterminer le volume de la pyramide $SABDC$.

Correction :

Le volume d'une pyramide est donné par $V = \frac{1}{3} \times$ aire de la base $\times$ hauteur.
La base est le trapèze $ABDC$ d'aire $\mathcal{A} = 15$ cm^2.
Sachant que I est l'intersection de Δ (orthogonale à (ABC) passant par S) et (ABC), on déduit que I est le projeté orthogonal de S sur (ABC) et donc IS est la hauteur issue de S de la pyramide $SABCD$. Nous savons $SI = 2$ cm.
Ainsi :

$$\mathcal{V}(SABCD) = \frac{1}{3} \times 15 \times 2 = \frac{1}{3} \times 30 = 10 \text{ cm}^3.$$

Le volume de la pyramide $SABDC$ est donc 10 cm^3.

II **(5 points)** *Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.*

On munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

1. On considère les points $A(-1 ; 0 ; 5)$ et $B(3 ; 2 ; -1)$.
Affirmation 1 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3 - 2t \\ y &=& 2 - t \\ z &=& -1 + 3t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Correction :

Soit Δ la droite donnée par cette représentation paramétrique.

Pour $A(-1;0;5)$: on cherche t tel que

$$\begin{cases} 3-2t=-1 \\ 2-t=0 \\ -1+3t=5 \end{cases}.$$

De la première équation : $3-2t=-1 \Rightarrow -2t=-4 \Rightarrow t=2$. De la deuxième : $2-t=0 \Rightarrow t=2$. De la troisième : $-1+3t=5 \Rightarrow 3t=6 \Rightarrow t=2$. Donc pour $t=2$, on obtient A, donc $A \in \Delta$.
Pour $B(3;2;-1)$: on cherche t tel que

$$\begin{cases} 3-2t=3 \\ 2-t=2 \\ -1+3t=-1 \end{cases}.$$

De la première : $3-2t=3 \Rightarrow -2t=0 \Rightarrow t=0$. De la deuxième : $2-t=2 \Rightarrow -t=0 \Rightarrow t=0$. De la troisième : $-1+3t=-1 \Rightarrow 3t=0 \Rightarrow t=0$. Donc pour $t=0$, on obtient B, donc $B \in \Delta$.
Ainsi Δ passe par A et B, donc $\Delta=(AB)$. L'affirmation 1 est vraie.

Remarque 1. Il y a une démonstration plus élégante dans l'autre version du sujet.

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (OAB).

Correction :

Pour vérifier si $\vec{n}$ est normal au plan (OAB), on doit montrer que $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de ce plan, par exemple $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
On a :

$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculons les produits scalaires :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA}=-5+0+5=0,$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OB}=15-4-1=10\neq 0.$$

Puisque $\vec{n}\cdot\overrightarrow{OB}=10\neq 0$, le vecteur $\vec{n}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{OB}$, donc il n'est pas normal au plan (OAB). L'affirmation 2 est fausse.

2. On considère :

- la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x &= 15+k \\ y &= 8-k \\ z &= -6+2k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$;
- la droite d' de représentation paramétrique $\begin{cases} x &= 1+4s \\ y &= 2+4s \\ z &= 1-6s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

Affirmation 3 : Les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

Correction :

Pour vérifier si d et d' sont coplanaires, on examine d'abord si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Pour d : $\vec{u}_d\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$. Pour d' : $\vec{u}_{d'}\begin{pmatrix}4\\4\\-6\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires car les coordonnées ne sont pas proportionnelles : $\dfrac{1}{4} \neq \dfrac{-1}{4}$.
On cherche maintenant un point d'intersection éventuel.

$$M(x;y;z) \in d \cap d' \iff \begin{cases} 15+k = 1+4s \\ 8-k = 2+4s \\ -6+2k = 1-6s \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k-4s = -14 \\ -k-4s = -6 \\ 2k+6s = 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k-4s = -14 & (1) \\ -8s = -20 & (1)+(2) \\ 2k+6s = 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k-4s = -14 \\ s = \dfrac{5}{2} \\ 2k+6s = 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k = -4 \\ s = \dfrac{5}{2} \\ k = -4 \end{cases}$$

Ce dernier système admet une solution. Il existe donc un point d'intersection et les droites d et d' sont sécantes et donc d et d' sont coplanaires. L'affirmation 3 est fausse.