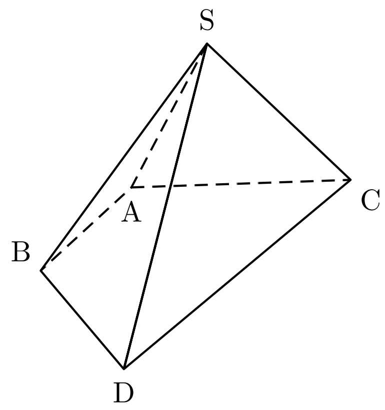
DS N° 8 : Espace (1h20)

I **(15 points)**



Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points : $A(3\ ;\ -1\ ;\ 1)$; $B(4\ ;\ -1\ ;\ 0)$; $C(0\ ;\ 3\ ;\ 2)$; $D(4\ ;\ 3\ ;\ -2)$ et $S(2\ ;\ 1\ ;\ 4)$.
Dans cet exercice on souhaite montrer que $SABDC$ est une pyramide à base $ABDC$ trapézoïdale de sommet S, afin de calculer son volume.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. (a) Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.
   (b) Montrer que le quadrilatère $ABDC$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$.
3. (a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2\ ;\ 1\ ;\ 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point S et orthogonale au plan (ABC).
   (d) On note I le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
   Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{8}{3}\right)$, puis montrer que $\mathrm{SI} = 2\,\mathrm{cm}$.
4. (a) Vérifier que le projeté orthogonal H du point B sur la droite (CD) a pour coordonnées $H(3\ ;\ 3\ ;\ -1)$ et montrer que $HB = 3\sqrt{2}$ cm.
   (b) Calculer la valeur exacte de l'aire du trapèze $ABDC$.
5. Déterminer le volume de la pyramide $SABDC$.

II **(5 points)** *Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.*

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points

$$A(0\ ;\ 4\ ;\ -1),\qquad B(6\ ;\ 1\ ;\ 5)\qquad \text{et}\qquad C(6\ ;\ -2\ ;\ -1).$$

On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

1. **Affirmation :** Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
2. **Affirmation :** Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2+2t\\ y &=& 3-t\\ z &=& 1+2t\end{array}\right.\quad \text{où } t\in\mathbb{R}.$$

3. On considère les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ dont on donne ci-dessous une représentation paramétrique :

$$\mathcal{D}\ \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3+t\\ y &=& 1+t\\ z &=& 2+t\end{array}\right.\ \text{où } t\in\mathbb{R}\ ;\quad \mathcal{D}'\ \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2t'\\ y &=& 4-t'\\ z &=& -1+2t'\end{array}\right.\ \text{où } t'\in\mathbb{R}.$$

Affirmation : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.