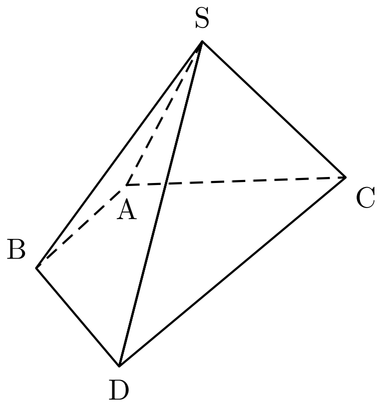
DS N°8 : Espace (1h20)

I (15 points)



Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points : $A(3 ; -1 ; 1)$; $B(4 ; -1 ; 0)$; $C(0 ; 3 ; 2)$; $D(4 ; 3 ; -2)$ et $S(2 ; 1 ; 4)$.
Dans cet exercice on souhaite montrer que $SABDC$ est une pyramide à base $ABDC$ trapézoïdale de sommet S, afin de calculer son volume.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Correction :

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles : $\dfrac{1}{-3} \neq \dfrac{0}{4}$. Ainsi, les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. (a) Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

Correction :

A, B, C ne sont pas alignés, donc pour tester la coplanarité de A, B, C, D, il suffit de tester si $\overrightarrow{AD}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
On a $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\text{Et } A, B, C, D \text{ coplanaires } &\iff \exists \alpha, \beta \text{ tels que } \overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.\\
&\iff \begin{cases} \alpha - 3\beta = 1 \\ 0 + 4\beta = 4 \\ -\alpha + \beta = -3 \end{cases}.\\
&\iff \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \\ \alpha = 4 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires, et donc A, B, C, D sont coplanaires.

(b) Montrer que le quadrilatère $ABDC$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$.

Correction :

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$.

On a donc $\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{AB}$, donc ces vecteurs sont colinéaires et ainsi (AB) parallèle à (CD).
Le quadrilatère $ABDC$ a donc deux côtés opposés parallèles : c'est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$.

3. (a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2\ ;\ 1\ ;\ 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Correction :

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment un couple qui dirige le plan (ABC).
On a :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\times 1 + 1\times 0 + 2\times(-1) = 2+0-2 = 0,$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times(-3) + 1\times 4 + 2\times 1 = -6+4+2 = 0.$$

Ainsi $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$, donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

(b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

Correction :

Le plan (ABC) admet $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ comme vecteur normal, donc son équation est de la forme :

$$2x + y + 2z + d = 0. \qquad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

Le point $A(3;-1;1)$ appartient à ce plan, donc $6-1+2+d=0$ et finalement $d=-7$.
Ainsi une équation cartésienne de (ABC) est :

$$2x + y + 2z - 7 = 0.$$

(c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point S et orthogonale au plan (ABC).

Correction :

La droite Δ est orthogonale à (ABC), donc elle admet $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

Elle passe par $S(2;1;4)$, donc une représentation paramétrique est :

$$\Delta : \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+t \\ z = 4+2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}).$$

(d) On note I le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{8}{3}\right)$, puis montrer que $\mathrm{SI} = 2\,\mathrm{cm}$.

Correction :

On a :

$$I(x;y;z) \in \Delta \cap (ABC) \iff \begin{cases} 2x+y+2z-7=0 \\ x=2+2t \\ y=1+t \\ z=4+2t \end{cases}$$

$$\iff 2(2+2t)+(1+t)+2(4+2t)-7=0 \quad \text{Avec } (x,y,z), \text{ donné par } \Delta$$

$$\iff 9t+6=0$$

$$\iff t=-\frac{2}{3}$$

Alors $\begin{cases} x = = 2-\frac{4}{3} = \frac{2}{3} \\ y = 1+\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \\ z = 4-\frac{4}{3} = \frac{8}{3} \end{cases}$ et donc $I\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$.

On a $\overrightarrow{SI}\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$, donc $SI^2 = \frac{16}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9} = \frac{36}{9} = 4$. Et donc $SI = 2\,\text{cm}$

4. (a) Vérifier que le projeté orthogonal H du point B sur la droite (CD) a pour coordonnées $H(3\,;\,3\,;\,-1)$ et montrer que $HB = 3\sqrt{2}$ cm.

Correction :

On doit ici vérifier deux points :

- $H \in (CD)$
- $(BH) \perp (CD)$

On a $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CH}$ et donc $H \in (CD)$.

D'autre part : $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CD} = -4+4=0$ donc $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{CD}$.

Ainsi $H(3;3;-1)$ est bien le projeté orthogonal du point B sur la droite (CD).

On a $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc $BH^2 = 1+16+1 = 18$ et donc $BH = 3\sqrt{2}$cm.

(b) Calculer la valeur exacte de l'aire du trapèze $ABDC$.

Correction :

L'aire d'un trapèze est donnée par $\mathcal{A} = \frac{b+B}{2} \times h$, où b et B sont les longueurs des bases et h la hauteur.

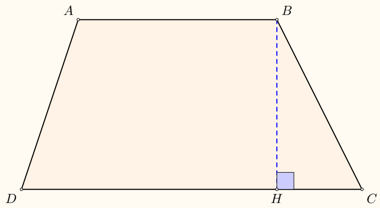
Ici d'après la question 2b, les bases sont $[AB]$ et $[CD]$.

On a :

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

donc $AB^2 = 2$ et $CD^2 = 32$
donc $AB = \sqrt{2}$ et $CD = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

La hauteur h du trapèze à été calculée précédemment puisque H le projeté orthogonal du point B sur la droite (CD).
On a $h = HB = 3\sqrt{2}$ cm.



Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(ABDC) &= \frac{AB+CD}{2} \times HB \\ &= \frac{\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = \frac{5\times 3\times 2}{2} \\ &= 15 \text{ cm}^2.\end{aligned}$$

Donc l'aire du trapèze $ABDC$ est 15 cm^2.

5. Déterminer le volume de la pyramide $SABDC$.

Correction :

Le volume d'une pyramide est donné par $V = \dfrac{1}{3} \times$ aire de la base $\times$ hauteur.
La base est le trapèze $ABDC$ d'aire $\mathcal{A} = 15$ cm^2.
Sachant que I est l'intersection de Δ (orthogonale à (ABC) passant par S) et (ABC), on déduit que I est le projeté orthogonal de S sur (ABC) et donc IS est la hauteur issue de S de la pyramide $SABCD$. Nous savons $SI = 2$ cm.
Ainsi :

$$\mathcal{V}(SABCD) = \frac{1}{3} \times 15 \times 2 = \frac{1}{3} \times 30 = 10 \text{ cm}^3.$$

Le volume de la pyramide $SABDC$ est donc 10 cm^3.

II **(5 points)** *Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.*

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$, on considère les points

$$A(0\ ;\ 4\ ;\ -1), \quad B(6\ ;\ 1\ ;\ 5) \quad \text{et} \quad C(6\ ;\ -2\ ;\ -1).$$

On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

1. **Affirmation :** Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Correction :

Pour vérifier si $\vec{n}$ est normal à (ABC), on calcule les produits scalaires avec deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan, par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix}$.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 12 - 6 - 6 = 0,$$
$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 12 - 12 + 0 = 0.$$

Ainsi $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$, donc $\vec{n}$ est bien un vecteur normal au plan (ABC). L'affirmation est vraie.

2. **Affirmation :** Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2+2t \\ y & = & 3-t \\ z & = & 1+2t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

Correction :

Soit

$$\Delta : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2+2t \\ y & = & 3-t \\ z & = & 1+2t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

Le plus simple et le moins élégant est de vérifier si A et B appartiennent à Δ.
Pour $A(0;4;-1)$:
Je remarque qu'avec $t=-1$ dans les équations de Δ, on obtient A. Donc $A \in \Delta$.
De même avec $t=2$, on obtient B, donc $B \in \Delta$.
Ainsi Δ passe par A et B, donc $\Delta = (AB)$. L'affirmation est vraie.

3. On considère les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ dont on donne ci-dessous une représentation paramétrique :

$$\mathcal{D} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+t \\ y & = & 1+t \\ z & = & 2+t \end{array}\right. \text{ où } t \in \mathbb{R} \ ; \quad \mathcal{D}' \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t' \\ y & = & 4-t' \\ z & = & -1+2t' \end{array}\right. \quad \text{où } t' \in \mathbb{R}.$$

Affirmation : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.

Correction :

Pour vérifier si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires, on examine d'abord si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. Pour $\mathcal{D}$: $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, pour $\mathcal{D}'$: $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires (les coordonnées ne sont pas proportionnelles), donc les droites ne sont pas parallèles.

On cherche maintenant un point d'intersection.

$$M(x;y;z) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' \iff \begin{cases} 3+t = 2t' \\ 1+t = 4-t' \\ 2+t = -1+2t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t-2t' = -3 \\ t+t' = 3 \\ t-2t' = -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t-2t' = -3 \\ t+t' = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3t' = 6 \\ t = 3-t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t' = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

Donc $M(4;2;3)$ est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Puisqu'elles sont sécantes, elles sont coplanaires. L'affirmation est donc fausse.