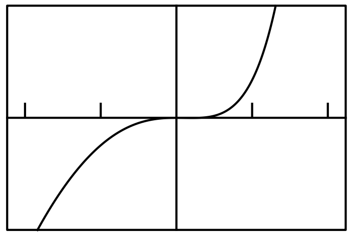
DS N°6 : Continuité (1h45)

(I) (17 points)
On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}.$$



Le graphique ci-contre est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.
A l'observation de cette courbe, on conjecture que f est croissante sur $[-3; 2]$.
Le but de cet exercice est de vérifier ou d'infirmer cette conjecture.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire
On introduit une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1.$$

1. Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis quand x tend vers $-\infty$.

Correction :

Limite en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} (x+2) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} e^{x-1} = +\infty$$

Donc par produit : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
Limite en $-\infty$:
En développant, on a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = xe^x e{-}1 + 2e^{x-1} - 1$$

Par croissance comparée $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$.
On a $\lim_{x\to-\infty} e^{x-1} = 0$.
Alors par somme, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1$.

2. Calculer la dérivée g' de g et montrer que pour $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = (x+3)e^{x-1}$$

Correction :

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \times e^{x-1} + (x+2) \times e^{x-1} \\ &= e^{x-1}(1 + x + 2) \\ &= (x+3)e^{x-1} \end{aligned}$$

3. En déduire le tableau de variations de g.

Correction :

On a $g'(x) = (x+3)\mathrm{e}^{x-1}$.
Comme $\mathrm{e}^{x-1} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $g'(x)$ est celui de $(x+3)$ qui est une fonction affine.
On déduit le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	-1	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-4}-1$	$\nearrow$	$+\infty$

Ici, on a calculé $g(-3)$: $g(-3) = (-3+2)\mathrm{e}^{-3-1} - 1 = (-1)\mathrm{e}^{-4} - 1 = -\mathrm{e}^{-4} - 1 < 0$

4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$ notée α et donner un encadrement à 10^{-2} de α.

Correction :

Sur $]-\infty;-3]$: $g(x) \leq -1$ d'après le tableau de variations, donc $g(x) = 0$ n'a pas de solution.
Sur $[-3;+\infty[$:

- g est continue (comme somme et produit de fonctions dérivables donc continues)
- g est strictement croissante.
- $g(-3) = -\mathrm{e}^{-4} - 1 \approx -1,02 < 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $0 \in [-\mathrm{e}^{-4} - 1; +\infty[$.

Alors d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]-3;+\infty[$.
D'après la calculatrice : $0,20 < \alpha < 0,21$

5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Correction :

D'après le tableau de variations de g, on déduit le tableau de signes de g :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

6. Pour $p \in \mathbb{N}$, on souhaite écrire un script en Python qui renvoie un encadrement de α avec une précision de 10^{-p}. Compléter le script suivant.

Correction :

La ligne 8 doit être : `while g(a)g(a+h)>0 :`

Partie B : Sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x, et montrer en particulier que $f'(x) = xg(x)$.

Correction :

Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\mathrm{e}^{x-1} + x^2\mathrm{e}^{x-1} - x \\ &= x\mathrm{e}^{x-1}(2+x) - x \\ &= x[(x+2)\mathrm{e}^{x-1} - 1] \\ &= x \cdot g(x) \end{aligned}$$

2. En déduire le sens de variations de la fonction f.

Correction :

Le signe de $f'(x) = x \cdot g(x)$ est donné par le produit des signes de x (affine) et de $g(x)$ (etudié au dessus).
On a donc le tableau de signe et de variations suivant :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

3. Que pensez-vous de la conjecture ?

Correction :

D'après le tableau de variations, f n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Partie C : Encadrement de $f(\alpha)$

1. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.

Correction :

On sait par définition de α que $g(\alpha) = 0$, donc $(\alpha+2)\mathrm{e}^{\alpha-1} - 1 = 0$, et donc en isolant $\mathrm{e}^{\alpha-1}$, on a :

$$\mathrm{e}^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha+2}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= \alpha^2 \mathrm{e}^{\alpha-1} - \frac{\alpha^2}{2} \\
&= \alpha^2 \cdot \frac{1}{\alpha+2} - \frac{\alpha^2}{2} \\
&= \frac{\alpha^2}{\alpha+2} - \frac{\alpha^2}{2} \\
&= \frac{2\alpha^2 - \alpha^2(\alpha+2)}{2(\alpha+2)} \\
&= \frac{2\alpha^2 - \alpha^3 - 2\alpha^2}{2(\alpha+2)} \\
&= \frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}
\end{aligned}$$

2. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $h(x) = \dfrac{-x^3}{2(x+2)}$.

   (a) Calculer $h'(x)$ pour x élément de $[0;1]$, puis donner le tableau de variation de h sur $[0;1]$.

Correction :

Pour $x \in [0;1]$:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{-3x^2 \cdot 2(x+2) - (-x^3) \cdot 2}{[2(x+2)]^2} \\
&= \frac{-6x^2(x+2) + 2x^3}{4(x+2)^2} \\
&= \frac{-6x^3 - 12x^2 + 2x^3}{4(x+2)^2} \\
&= \frac{-4x^3 - 12x^2}{4(x+2)^2} \\
&= \frac{-4x^2(x+3)}{4(x+2)^2} \\
&= \frac{-x^2(x+3)}{(x+2)^2}
\end{aligned}$$

Sur $[0;1]$, on a

- $-x^2 \leq 0$
- $(x+3) > 0$
- $(x+2)^2 > 0$

donc par produit $h'(x) \leq 0$ et donc h est décroissante sur $[0;1]$.

   (b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

Correction :

On observe que $h(\alpha) = f(\alpha)$, et d'après la partie A, on sait que :

$$0,2 \leq \alpha \leq 0,21$$

En conséquence par application de la fonction h qui est décroissante sur $[0;1]$ on a

$$h(0,2) \geq h(\alpha) \geq h(0,21)$$

Ce qui nous donne donc :

$$h(0,21) \leq f(\alpha) \leq h(0,20)$$

avec
$h(0,2) = -\dfrac{1}{550} \approx -0,0018181818...$
et
$h(0,21) = -\dfrac{9261}{4420000} \approx -0,0020952488$
Alors

$$-0,0021 \leq f(\alpha) \leq 0,0018$$

II **(3 points)** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan. On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée seconde de f, c'est-à-dire la fonction dérivée de la fonction f'.

1. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$,
$$f''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$$

Correction :

On calcule d'abord $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{-x} + x(-\mathrm{e}^{-x}) + 2 \\ &= \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} + 2 \\ &= (1-x)\mathrm{e}^{-x} + 2 \end{aligned}$$

Puis $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\mathrm{e}^{-x} - [(1-x)(-\mathrm{e}^{-x}) + \mathrm{e}^{-x}] \\ &= -\mathrm{e}^{-x} + (1-x)\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} \\ &= (-1+1-x-1)\mathrm{e}^{-x} \\ &= (x-2)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

2. Etudier la convexité de la fonction f.

Correction :

On a $f''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$.
Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f''(x)$ est celui de $(x-2)$ qui est affine.
On a donc le tableau de convexité suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
Convexité de f		*concave*		*convexe*	

Donc :

— f est concave sur $]-\infty; 2]$

— f est convexe sur $[2; +\infty[$

3. Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Correction :

La dérivée seconde s'annule et change de signe en $x = 2$, donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en $x = 2$.
Calcul de $f(2)$:

$$\begin{aligned} f(2) &= 2\mathrm{e}^{-2} + 4 - 1 \\ &= 2\mathrm{e}^{-2} + 3 \end{aligned}$$

Coordonnées du point d'inflexion : $\boxed{I\left(2; 3 + \frac{2}{\mathrm{e}^2}\right)}$

III✳ On considère f définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^2(x) + f(x) = 6$$

Montrer que f est une fonction constante.

Correction :

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^2(x) + f(x) - 6 = 0$$

donc

$$(f(x) - 2)(f(x) + 3) = 0$$

et donc $f(x) = 2$ ou $f(x) = -3$
Par l'absurde : si f n'est pas constante et ne vaut pas identiquement 2 ou -3, alors il existe $a \neq b$ tel que $f(a) = 2$ et $f(b) = -3$. f étant continue, il devrait exister d'après le théorème des valeurs intermédiaire un réel c tel que $f(c) = 0$. Ceci est impossible !!!
Donc f est constante égale à 2 ou -3.