DS N° 5 : Suites (1h)

I (5 points)

On munit le plan d'un repère orthonormé.
Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on considère la fonction f_n définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n (voir courbes en annexe).

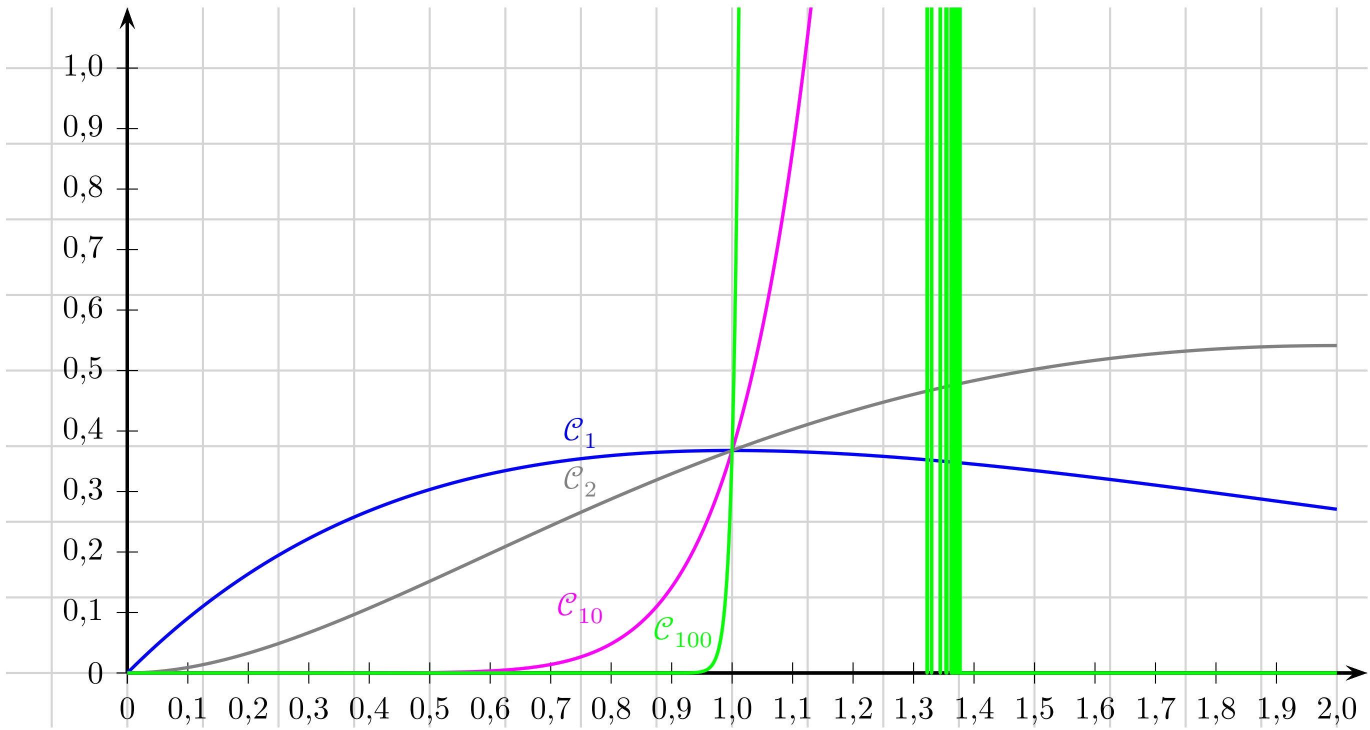
1. (a) On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   Montrer que pour tout $x \geqslant 0$,

$$f_n'(x) = (n - x)x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}.$$

   (b) Justifier tous les éléments du tableau ci-dessous :

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$	$\searrow$	0

2. Les courbes $\mathcal{C}_n$ semblent avoir deux points communs. Lesquels ? Vous Justifierez par un calcul.



II (8 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{11}{u_n}\right)$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

Partie A - Étude de la suite (u_n)

1. Donner u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{x}\right)$$

   Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{11}\ ;\ +\infty\right[$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$.
4. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle. On note a cette limite.
5. Après avoir déterminé et résolu une équation dont a est solution, préciser la valeur exacte de a.

Partie B - Application géométrique - Hors barème. A faire pour demain.

Pour tout entier naturel n, on considère un rectangle R_n d'aire 11 dont la largeur est notée ℓ_n et longueur L_n

La suite (L_n) est définie par $L_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n,

$$L_{n+1} = \frac{L_n + \ell_n}{2}$$

1. (a) Expliquer pourquoi $\ell_0 = 2,2$.
   (b) Établir que pour tout entier naturel n,

$$\ell_n = \frac{11}{L_n}.$$

2. Vérifier que la suite (L_n) correspond à la suite (u_n) de la **partie A**.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\ell_n \leqslant \sqrt{11} \leqslant L_n$.
4. On admet que les suites (L_n) et (ℓ_n) convergent toutes les deux vers $\sqrt{11}$. Interpréter géométriquement ce résultat dans le contexte de la **partie B**.
5. Voici un script, écrit en langage Python, relatif aux suites étudiées dans cette partie :

```
def heron(n):
  L=5
  ℓ=2.2
  for i in range(n):
    L = (L+ℓ) / 2
    ℓ = 11 / L
  return round(ℓ,6), round(L,6)
```

   On rappelle que la fonction Python `round(x,k)` renvoie une version arrondie du nombre `x` avec `k` décimales.

   (a) Si l'utilisateur tape `heron(3)` dans une console d'exécution Python, qu'obtient-il comme valeurs de sortie pour ℓ et L ?
   (b) Donner une interprétation de ces deux valeurs.