DS N° 5 : Suites (1h)

I (5 points)

On munit le plan d'un repère orthonormé.
Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on considère la fonction f_n définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n (voir courbes en annexe).

1. (a) On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.
Montrer que pour tout $x \geqslant 0$,

$$f_n'(x) = (n-x)x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}.$$

Correction :

On a :

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= nx^{n-1}\mathrm{e}^{-x} + x^n(-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= \mathrm{e}^{-x}(nx^{n-1} - x^n) \\ &= \mathrm{e}^{-x}x^{n-1}(n-x). \end{aligned}$$

(b) Justifier tous les éléments du tableau ci-dessous :

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	↗	$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$	↘	0

Correction :

On a $x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} \geq 0$ sur $[0; +\infty[$.
Par produit, le signe de $f_n'(x)$ est donc celui de $n - x$ qui est affine et s'annule en n.. On a

- $f_n(0) = 0$
- $f_n(n) = n^n \mathrm{e}^{-n} = \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.
- $f_n(x) = \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x}$. Ainsi par inverse de la croissance comparée : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$

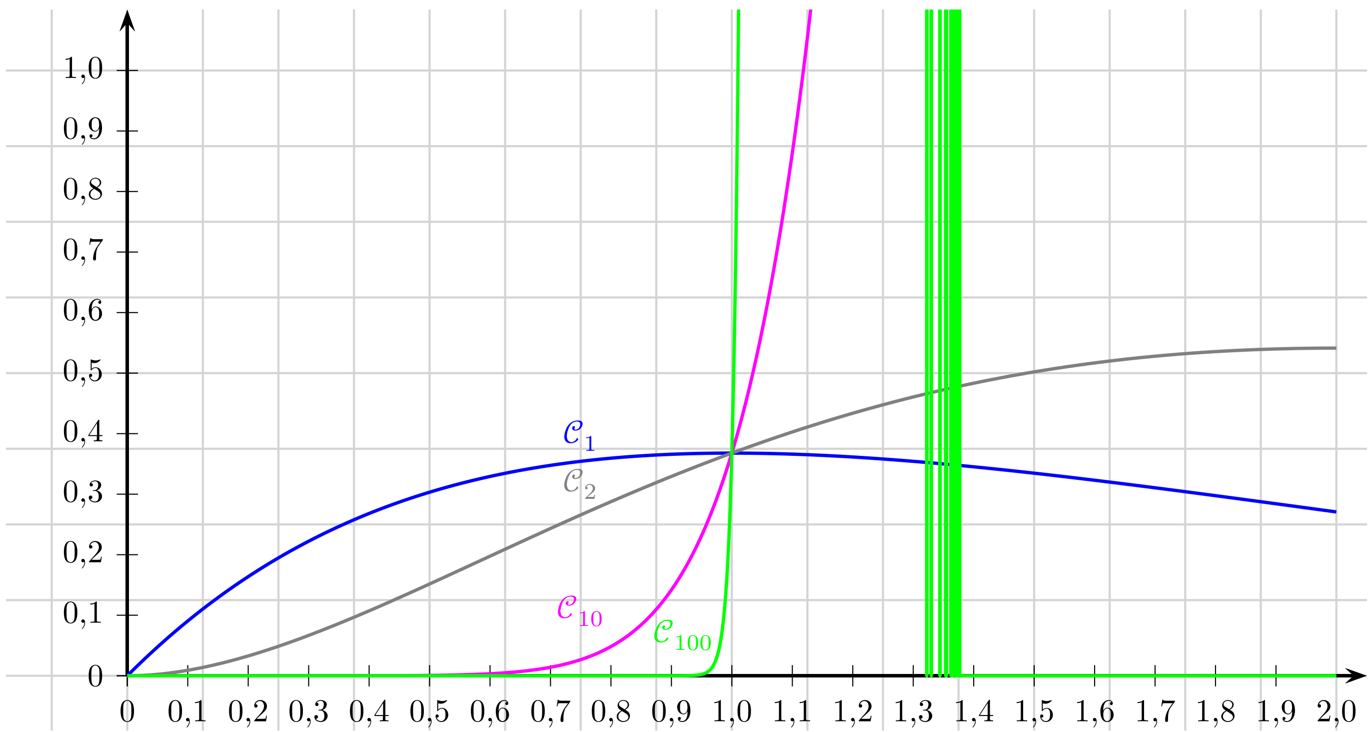
Nous avons donc bien le tableau de variation suivant pour f_n.

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$	$\searrow$	0

2. Les courbes $\mathcal{C}_n$ semblent avoir deux points communs. Lesquels ? Vous Justifierez par un calcul.

Correction :

D'après le graphe, il semble que $O(0;0)$ et le point $A(1;f_n(1))$ sont communs à toutes les courbes.
Vérifions cela :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\star}$, on a $f_n(0) = 0$ donc $O(0;0) \in \mathcal{C}_n$.
De même, $f_n(1) = \mathrm{e}^{-1}$ donc $A(1;\mathrm{e}^{-1}) \in \mathcal{C}_n$.
Il y a donc bien deux points communs à toutes les courbes.



(II) (8 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{11}{u_n}\right)$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

Partie A - Étude de la suite (u_n)

1. Donner u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.

Correction :

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{11}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{36}{5}\right) = \frac{18}{5}.$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{18}{5} + \frac{11}{\frac{18}{5}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{18}{5} + \frac{55}{18}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{324+275}{90}\right) = \frac{299}{90}.$$

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{x}\right)$$

Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{11}\ ;\ +\infty\right[$.

Correction :

On a pour $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{11}{x^2}\right).$$

Recherchons le signe de $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\iff 1 - \frac{11}{x^2} \geq 0 \\ &\iff x^2 \geq 11 \\ &\iff |x| \geq \sqrt{11} \qquad \text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^\star. \\ &\iff x \geq \sqrt{11} \qquad \text{car } x > 0 \end{aligned}$$

Donc f est croissante sur $[\sqrt{11};+\infty[$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$.

Correction :

Initialisation $(n = 0)$: Nous avons $u_0 = 5 > \sqrt{11} \approx 3.316$.
et $u_1 = \dfrac{18}{5} = 3.6 > \sqrt{11}$.
Donc on a bien $u_0 > u_1 \geq \sqrt{11}$.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons $u_k \geq u_{k+1} \geq \sqrt{11}$ et montrons que c'est aussi vrai au rang suivant.
On a

$$u_k \geq u_{k+1} \geq \sqrt{11}$$

et donc par application de f qui est croissante sur $[\sqrt{11};+\infty[$, on a :

$$f(u_k) \geq f(u_{k+1}) \geq f(\sqrt{11})$$

et donc

$$u_{k+1} \geq u_{k+2} \geq \sqrt{11}$$

.
L'hérédité est donc démontrée.
Conclusion : Par récurrence, $\forall n, u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}$.

4. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle. On note a cette limite.

Correction :

D'après la question précédente (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{11}$, donc par théorème, elle converge vers $a \geq \sqrt{11}$.

5. Après avoir déterminé et résolu une équation dont a est solution, préciser la valeur exacte de a.

Correction :

On a

- $u_{n+1} = f(u_n)$.
- (u_n) vers $a \geq \sqrt{11}$.
- f est continue sur $]0; +\infty[$ (car dérivable) donc f continue en a..

Alors par théorème du point fixe $f(a) = a$.
On a :

$$\begin{aligned} f(a) = a &\iff \frac{1}{2}\left(a + \frac{11}{a}\right) \\ &\iff 2a = a + \frac{11}{a} \\ &\iff a = \frac{11}{a} \\ &\iff a^2 = 11 \qquad\qquad \text{(car } a > 0\text{)} \\ &\iff a = \sqrt{11} \end{aligned}$$

Partie B - Application géométrique - Hors barème. A faire pour demain.

Pour tout entier naturel n, on considère un rectangle R_n d'aire 11 dont la largeur est notée ℓ_n et longueur L_n
La suite (L_n) est définie par $L_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n,

$$L_{n+1} = \frac{L_n + \ell_n}{2}$$

1. (a) Expliquer pourquoi $\ell_0 = 2,2$.
   (b) Établir que pour tout entier naturel n,

$$\ell_n = \frac{11}{L_n}.$$

2. Vérifier que la suite (L_n) correspond à la suite (u_n) de la **partie A**.

3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\ell_n \leqslant \sqrt{11} \leqslant L_n$.
4. On admet que les suites (L_n) et (ℓ_n) convergent toutes les deux vers $\sqrt{11}$. Interpréter géométriquement ce résultat dans le contexte de la **partie B**.
5. Voici un script, écrit en langage Python, relatif aux suites étudiées dans cette partie :

```
def heron(n):
  L=5
  ℓ=2.2
  for i in range(n):
    L = (L+ℓ) / 2
    ℓ = 11 / L
  return round(ℓ,6), round(L,6)
```

On rappelle que la fonction Python `round(x,k)` renvoie une version arrondie du nombre `x` avec `k` décimales.

(a) Si l'utilisateur tape `heron(3)` dans une console d'exécution Python, qu'obtient-il comme valeurs de sortie pour ℓ et L ?

(b) Donner une interprétation de ces deux valeurs.