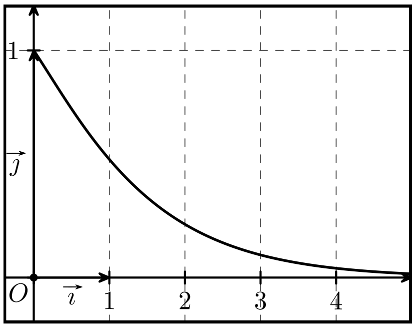
DS N° 11 : Intégration et équations différentielles (1h)

I **(12 points)** On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par

$$J_n = \int_1^n \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t.$$



On a tracé ci-contre la fonction $f : t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}$.

1. Que représente (J_n) ? Que peut-on conjecturer sur les variations de (J_n) ?
2. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
3. On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par :

$$I_n = \int_1^n (t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

   (a) Justifier que, pour tout $t \geqslant 1$, on a $\sqrt{t+1} \leqslant t+1$.
   (b) En déduire que $J_n \leqslant I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
4. (a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_n en fonction de n. Vous montrerez en particulier

$$I_n = \frac{3}{\mathrm{e}} - (n+2)\mathrm{e}^{-n}$$

   (b) En déduire que la suite (J_n) est majorée.
5. La suite (J_n) est-elle convergente ?

II **(8 points)**

On considère l'équation différentielle $(E) : y - y' = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ et on cherche l'ensemble des solutions de cette équation définies sur $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $u(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ est solution de (E).
2. Démontrer qu'une fonction v définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $v-u$, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$, est solution de l'équation différentielle $(F) : y - y' = 0$.
3. (a) Résoudre (F).
   (b) En déduire toutes les solutions définies sur $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation (E).
   (c) Déterminer la solution de (E) qui satisfait $v(1) = 0$.

III✳ Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : \qquad y' - 3y = 0$$

et en déduire les solutions de

$$(F) : \qquad y'' - 3y' = 0$$