DS N° 11 : Intégration et équations différentielles (1h)

I **(12 points)** On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par

$$J_n = \int_1^n \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

On a tracé ci-contre la fonction $f : t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}$.

1. Que représente (J_n) ? Que peut-on conjecturer sur les variations de (J_n) ?

Correction :

La fonction f est positive sur $\mathbb{R}_+$ par produit. Ainsi les bornes étant dans l'ordre, on déduit que J_n est l'aire de la zone délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, les droites d'équation $x = 1$, $x = n$ et $y = 0$.
En particulier, on en déduit que (J_n) sera une suite croissante.

2. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.

Correction :

C'est juste un petit coup de Chasles... On a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\begin{aligned}
J_{n+1} - J_n &= \int_1^{n+1} \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,dt - \int_1^{n} \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,dt \\
&= \int_1^{n} \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,dt + \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,dt - \int_1^{n} \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,dt \\
&= \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,dt
\end{aligned}$$

Or f étant positive, on déduit par théorème de positivité que cette dernière intégrale est positive.
Ainsi $J_{n+1} - J_n \geq 0$ et (J_n) est croissante.

3. On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par :

$$I_n = \int_1^n (t+1)\mathrm{e}^{-t}\,dt.$$

(a) Justifier que, pour tout $t \geqslant 1$, on a $\sqrt{t+1} \leqslant t+1$.

Correction :

Par simple analyse synthèse, on obtient : Pour $t \geq 0$:

$$\begin{array}{rll}
 & 0 \leq t & \\
\text{Donc} & 1 \leq t+1 & \\
\text{Donc} & 1 \leq \sqrt{t+1} & \text{Car la fonction } \sqrt{.} \text{ est strictement croissante} \\
\text{Donc} & \sqrt{t+1} \leq t+1 & \text{Par produit par } \sqrt{t+1} \text{ qui est strictement positif}
\end{array}$$

(b) En déduire que $J_n \leqslant I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Correction :

De l'inégalité précédente, on obtient par produit par $\mathrm{e}^{-t} > 0$.

$$\sqrt{t+1}\mathrm{e}^{-t} \leq (t+1)\mathrm{e}^{-t}$$

alors par intégration de l'inégalité avec les bornes dans l'ordre ($1 \leq n$) on a $J_n \leq I_n$.

4. (a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_n en fonction de n. Vous montrerez en particulier

$$I_n = \frac{3}{\mathrm{e}} - (n+2)\mathrm{e}^{-n}$$

Correction :

On pose $u(t) = t+1$, $v'(t) = \mathrm{e}^{-t}$, alors $u'(t) = 1$, $v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$,
on a alors par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^n (t+1)\mathrm{e}^{-t}\,dt \\ &= \left[-(t+1)\mathrm{e}^{-t}\right]_1^n + \int_1^n \mathrm{e}^{-t}\,dt \\ &= -(n+1)\mathrm{e}^{-n} + 2\mathrm{e}^{-1} + \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_1^n \\ &= -(n+1)\mathrm{e}^{-n} + 2\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-n} + \mathrm{e}^{-1} \\ &= \frac{3}{\mathrm{e}} - (n+2)\mathrm{e}^{-n} \end{aligned}$$

(b) En déduire que la suite (J_n) est majorée.

Correction :

On a $(n+2)\mathrm{e}^{-n} > 0$ donc $I_n = \frac{3}{\mathrm{e}} - (n+2)\mathrm{e}^{-n} \leq \frac{3}{\mathrm{e}}$.
On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$J_n \leq I_n \leq \frac{3}{\mathrm{e}}$$

et donc (J_n) est majorée par $\frac{3}{\mathrm{e}}$.

5. La suite (J_n) est-elle convergente ?

Correction :

D'après 2. (J_n) est croissante et d'après la question précédente elle est majorée donc par théorème (J_n) converge vers $\ell \leq \frac{3}{\mathrm{e}}$.

II (8 points)

On considère l'équation différentielle $(E) : y - y' = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ et on cherche l'ensemble des solutions de cette équation définies sur $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $u(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$ est solution de (E).

Correction :

Il suffit juste de vérifier : Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} u(x) - u'(x) &= \frac{\mathrm{e}^x}{x} - \frac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{x^2} \\ &= \frac{x\mathrm{e}^x}{x^2} - \frac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{x^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} \end{aligned}$$

Et donc u est bien solution de (E).

2. Démontrer qu'une fonction v définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $v - u$, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$, est solution de l'équation différentielle $(F) : y - y' = 0$.

Correction :

On a :

$$\begin{aligned} v - u \text{ solution de } (F) &\iff (v-u) - (v-u)' = 0 \\ &\iff v - u - v' + u' = 0 \\ &\iff v - v' = u - u' \\ &\iff v - v' = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} \quad \text{Car } u \text{ solution de } (E) \qquad \iff v \text{ solution de } (E) \end{aligned}$$

3. (a) Résoudre (F).

Correction :

On a $(F) \iff y' = y$.
On reconnaît donc une équation différentielle de la forme $y' = ay$ dont les solutions sont les fonctions de la forme :

$$v(x) = C\mathrm{e}^x \qquad \text{où } C \text{ est une constante réelle}$$

(b) En déduire toutes les solutions définies sur $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation (E).

Correction :

D'après ce qui précède, v solution de (E) si et seulement si $v - u$ solution de (F).
Ainsi nous savons que pour $x > 0$ on a

$$v(x) - u(x) = C\mathrm{e}^x$$

et donc la solution de (E) satisfait :

$$v(x) = C\mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}^x}{x}$$

(c) Déterminer la solution de (E) qui satisfait $v(1) = 0$.

Correction :

De plus $v(1) = 0 \iff C\mathrm{e} + \mathrm{e} = 0$ et donc $C = -1$.
La solution cherchée satisfait pour $x > 0$:

$$v(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x} - \mathrm{e}^x$$

III✳ Résoudre l'équation différentielle

$$(E): \qquad y' - 3y = 0$$

et en déduire les solutions de

$$(F): \qquad y'' - 3y' = 0$$

Correction :

Il suffit de remarquer que f solution de (F) si et seulement si f' solution de (E).
Ainsi $f'(x) = C\mathrm{e}^{3x}$ et donc $f(x) = K_1\mathrm{e}^{3x} + K_2$ où K_1 et K_2 sont des constantes.