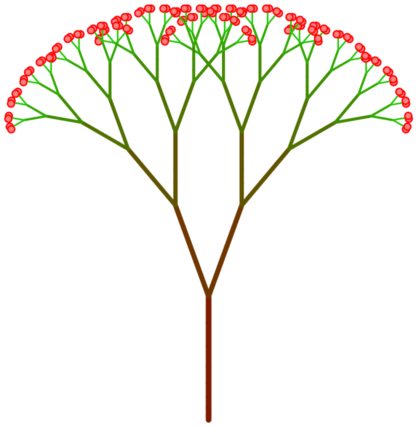
DS N° 10 : Intégration (1h)

I **(1 points)** Résoudre sur $[-\pi;\pi]$:

$$\sin x(2\cos^2 x - 1) = 0$$



II **(4 points)** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (\cos x + 2)\mathrm{e}^{-x}$$

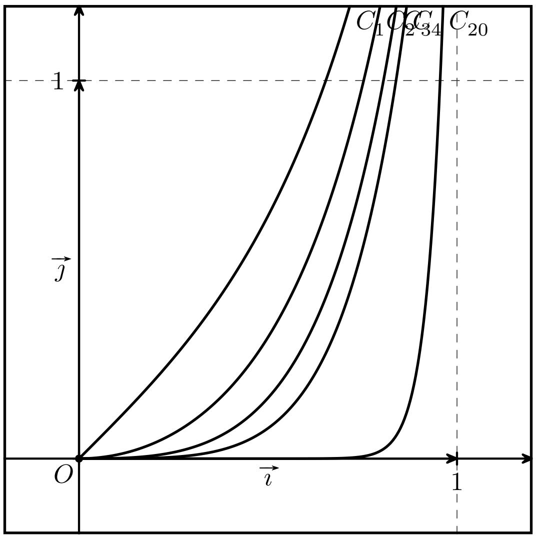
et soit $I = \displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{-x} \leq f(x) \leq 3\mathrm{e}^{-x}$$

2. En déduire un encadrement de I.
3. Montrer que $F : x \longmapsto \dfrac{1}{2}(\sin x - \cos x - 4)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire la valeur exacte de I.

III **(15 points)**



L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (I_n) définie ci-après pour n entier naturel non nul.

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Pour $\in \mathbb{N}^\star$, on introduit les fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{x^2}$$

Vous trouverez ci-contre la représentation de quelques-unes de ces fonctions.

1. (a) Interpréter géométriquement l'intégrale I_n.
   (b) En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.
2. Déterminer la valeur de I_1 par le calcul.
3. Pour tout entier n on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction H_n par

$$H_n(x) = x^{n+1}\mathrm{e}^{x^2}$$

   (a) Exprimer la dérivée H_n' en fonction de f_n et f_{n+1}.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, on a :

$$I_{n+2} = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{n+1}{2} I_n.$$

   (c) Calculer I_3 et I_5.
4. (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n \geqslant 0$.
   (b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
   (c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.
5. Soit ℓ la limite de (I_n), déterminer la valeur de ℓ.