DS N°10 : Intégration (1h)

I **(1 points)** Résoudre sur $[-\pi;\pi]$:

$$\sin x(2\cos^2 x - 1) = 0$$

Correction :

Soit (E) cette équation :

$$(E) \iff \sin x = 0 \quad \text{ou} \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} \qquad \iff \sin x = 0 \quad \text{ou} \quad |\cos x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Par lecture sur le cercle trigo (qu'il faut dessiner sur la copie), on a :

$$\mathcal{S} = \left\{0; \pi; -\pi; \frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$$

II **(4 points)** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (\cos x + 2)\mathrm{e}^{-x}$$

et soit $I = \displaystyle\int_0^\pi f(x)\,dx$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{-x} \leq f(x) \leq 3\mathrm{e}^{-x}$$

Correction :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & -1 \leq \cos x \leq 1 \\ \text{Donc} \quad & 1 \leq 2 + \cos x \leq 3 \\ \text{Donc} \quad & \mathrm{e}^{-x} \leq f(x) \leq 3\mathrm{e}^{-x} \qquad (\text{Car } \mathrm{e}^{-x} > 0) \end{aligned}$$

2. En déduire un encadrement de I.

Correction :

Alors par intégration de l'inégalité avec les bornes dans l'ordre $(0 < \pi)$:

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{-x}\,dx \leq I \leq \int_0^\pi 3\mathrm{e}^{-x}\,dx$$

Et $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{-x}\,dx = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^\pi = 1 - \mathrm{e}^{-\pi}$

Et donc

$$1 - \mathrm{e}^{-\pi} \leq I \leq 3(1 - \mathrm{e}^{-\pi})$$

3. Montrer que $F : x \longmapsto \frac{1}{2}(\sin x - \cos x - 4)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Correction :

On a :

$$\begin{aligned}F'(x) &= \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}(\sin x - \cos x - 4)\mathrm{e}^{-x}\\ &= \frac{1}{2}(2\cos x + 4)\mathrm{e}^{-x}\\ &= (\cos x + 2)\mathrm{e}^{-x}\\ &= f(x)\end{aligned}$$

Donc F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

4. En déduire la valeur exacte de I.

Correction :

On a

$$\begin{aligned}I = \int_0^{\pi} f(x)\,dx &= [F]_0^{\pi}\\ &= \frac{1}{2}\left[(\sin x - \cos x - 4)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\pi}\\ &= \frac{1}{2}[(1-4)\mathrm{e}^{-\pi} - (-5)]\\ &= \frac{1}{2}(5 - 3\mathrm{e}^{-\pi})\end{aligned}$$

III (15 points)

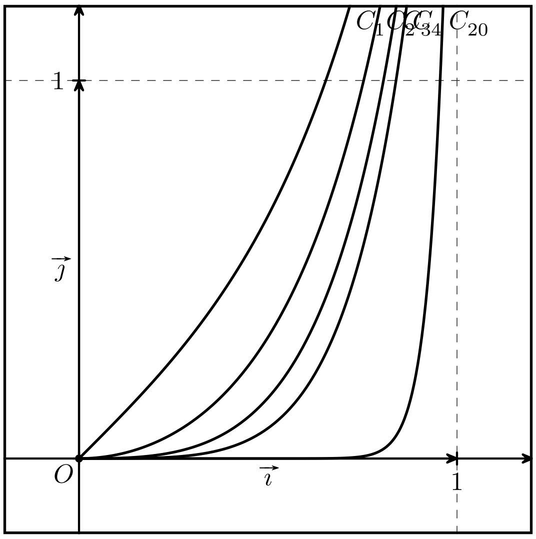
L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (I_n) définie ci-après pour n entier naturel non nul.

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Pour $\in \mathbb{N}^\star$, on introduit les fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{x^2}$$

Vous trouverez ci-contre la représentation de quelques-unes de ces fonctions.



1. (a) Interpréter géométriquement l'intégrale I_n.

Correction :

Les fonctions f_n sont positives, et les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre. On déduit alors que I_n est l'aire de la zone délimitée par $\mathcal{C}_n$, l'axes des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

(b) En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.

Correction :

Au vu du graphique, on conjecture $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

2. Déterminer la valeur de I_1 par le calcul.

Correction :

On a

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 2x\mathrm{e}^{x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}[\mathrm{e}^{x^2}]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}-1) \end{aligned}$$

3. Pour tout entier n on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction H_n par

$$H_n(x) = x^{n+1}\mathrm{e}^{x^2}$$

(a) Exprimer la dérivée H_n' en fonction de f_n et f_{n+1}.

Correction :

On a $H_n'(x) = (n+1)x^n\mathrm{e}^{x^2} + x^{n+1}2x\mathrm{e}^{x^2}$ et donc :

$$H_n'(x) = (n+1)f_n(x) + 2f_{n+2}(x)$$

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, on a :

$$I_{n+2} = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{n+1}{2}I_n.$$

Correction :

On déduit de ce qui précède :

$$f_{n+2}(x) = \frac{1}{2}H_n'(x) - \frac{1}{2}(n+1)f_n(x)$$

Et par intégration de l'égalité entre 0 et 1 :

$$I_{n+2} = [H_n]_0^1 - \frac{1}{2}(n+1)I_n$$

donc

$$I_{n+2} = \frac{\mathrm{e}}{2} - \frac{1}{2}(n+1)I_n$$

(c) Calculer I_3 et I_5.

Correction :

D'après la relation de récurrence obtenue :

$$I_3 = \frac{\mathrm{e}}{2} - \frac{1}{2}2I_1 = \frac{\mathrm{e}}{2} - \frac{1}{2}(\mathrm{e}-1) = \frac{1}{2}$$

Et

$$I_5 = \frac{\mathrm{e}}{2} - \frac{1}{2}4I_3 = \frac{\mathrm{e}}{2} - 2I_3 = \frac{\mathrm{e}}{2} - 1$$

4. (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n \geqslant 0$.

Correction :

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, les fonctions f_n sont positives sur $[0;1]$, alors par théorème de positivité avec les bornes dans l'ordre, on a $I_n \geqslant 0$.

(b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

Correction :

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in [0;1]$, on a

$$\begin{array}{rcl} & x \leq 1 & \\ \text{Donc} & x^{n+1} \leq x^n & \text{Car } x^n \geq 0 \\ \text{Donc} & x^{n+1}\mathrm{e}^{x^2} \leq x^n\mathrm{e}^{x^2} & \text{Car } \mathrm{e}^{x^2} \geq 0 \end{array}$$

Alors par intégration de l'inégalité avec les bornes dans l'ordre $(0 < 1)$:

$$I_{n+1} \leq I_n$$

Donc la suite (I_n) est décroissante.

(c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

Correction :

(I_n) est décroissante et minorée par 0 donc par théorème elle converge vers $\ell \geq 0$

5. Soit ℓ la limite de (I_n), déterminer la valeur de ℓ.

Correction :

De l'expression de récurrence, on déduit pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\frac{1}{2}(n+1)I_n = \frac{\mathrm{e}}{2} - I_{n+2}$$

Et donc

$$I_n = \frac{\mathrm{e}}{4(n+1)} - \frac{I_{n+2}}{2(n+1)}$$

Et par passage à la limite on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}}{4(n+1)} = 0$,

$\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+2} = \ell$ donc par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+2}}{2(n+1)} = 0$. Il s'ensuit $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Méthode de Clarisse :
On a

$$I_n = \frac{\mathrm{e}}{4(n+1)} - \frac{I_{n+2}}{2(n+1)}$$

mais on sait d'après 4.a que $I_{n+2} \geq 0$, alors $-\frac{I_{n+2}}{2(n+1)} \leq 0$ et il s'ensuit

$$I_n = \frac{\mathrm{e}}{4(n+1)} - \frac{I_{n+2}}{2(n+1)} \leq \frac{\mathrm{e}}{4(n+1)}$$

Alors en utilisant de nouveau 4.a on a

$$0 \leq I_n \leq \frac{\mathrm{e}}{4(n+1)}$$

Et on termine par le théorème des gendarmes.