Exercice 1 (Antilles sept 2020 - 10 pts) : Dans le cube $ABCDEFGH$ reproduit ci-dessous, on a placé les points M et N milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$. On se place dans le repère $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points H, M et N.
2. a) Justifier que les droites (CD) et (MN) sont sécantes.
   b) Donner une représentation paramétrique de la droite (MN).

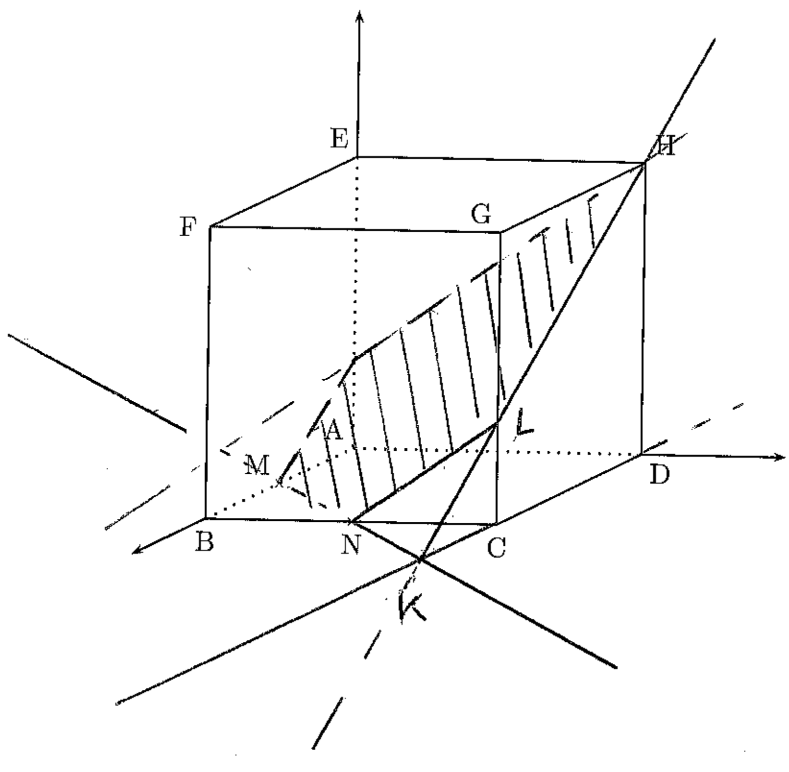
   On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (CD) est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 1 \\ z & = & 0 \end{array}\right. ,\ t \in \mathbb{R}.$$

   c) Déterminer les coordonnées du point K, le point d'intersection des droites (CD) et (MN).
3. Justifier que les points H, M, N définissent un plan.
4. Déterminer l'angle $\widehat{HMN}$ à 0,1º près.
5. On admet que la droite (CG) et le plan (HMN) sont sécants. On note L leur point d'intersection.
   a) Vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMN).
   b) Déterminer une équation cartésienne du plan (HMN).
   c) En déduire les coordonnées du point L.

   Le Devoir se termine ici !

6. Construire les points K et L puis la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (HMN).



Correction du dev n° 9 – TSpé

Ex 1 : Dans le repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ 0,25

$A(0;0;0)$
$B(1;0;0)$ 0,5
$C(1;1;0)$
$M(\frac{1}{2};0;0)$
$N(1;\frac{1}{2};0)$
$H(0;1;1)$
$K(\frac{3}{2};1;0)$
$L(1;1;\frac{1}{3})$

1) M milieu de $[AB]$: $M(\frac{1}{2};0;0)$
N milieu de $[BC]$: $N(1;\frac{1}{2};0)$
1 $H(0;1;1)$

0,75

2) a) (MN) et (CD) sont incluses dans le plan (ABC) ; elles ne sont pas parallèles donc sécantes.
0,5 0,5

b) $\vec{MN}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $(MN) : \begin{cases} x = \frac{1}{2}t' + 1/2 \\ y = \frac{1}{2}t' \\ z = 0 \end{cases}$ $(t' \in \mathbb{R})$

1

1 et $M \in (MN)$

c) or $(CD) : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

Donc $K(x;y;z)$ vérifie

1

$\begin{cases} t = 1/2\, t' + 1/2 \\ 1 = 1/2\, t' \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 3/2 \\ t' = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$

K intersection de (CD) et (MN) a pour coordonnées

1 $K(3/2 ; 1 ; 0)$

3) $\vec{MN}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{MH}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Les coordonnées ne sont pas proportionnelles

1

donc $\vec{MN}$ et $\vec{MH}$ non colinéaires

1 alors M, N, H non alignés et définissent un plan

4) $\vec{MN} \cdot \vec{MH} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{4}$

$\begin{cases} MN^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \\ MH^2 = \frac{1}{4} + 1 + 1 = \frac{9}{4} \end{cases}$

or $\vec{MN} \cdot \vec{MH} = MN \times MH \times \cos(\widehat{HMN})$

2,5

$= \sqrt{\frac{2}{4}} \times \sqrt{\frac{9}{4}} \times \cos(\widehat{HMN})$

2,5

$= \frac{\sqrt{18}}{4} \cos(\widehat{HMN}) = \frac{3\sqrt{2}}{4} \cos(\widehat{HMN})$

donc $\frac{1}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \cos(\widehat{HMN}) \iff \cos(\widehat{HMN}) = \frac{1}{3\sqrt{2}}$

D'après la calculatrice $\widehat{HMN} \simeq 76{,}4°$

5) a) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{MN} = 2 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times 0 = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{MH} = 2 \times \left(\frac{-1}{2}\right) - 2 \times 1 + 3 \times 1 = 0 \end{cases}$

donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{MN}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{MH}$ (deux vecteurs directeurs du plan (HMN) 1

donc $\vec{n}$ normal au plan (HMN) 1

b) alors (HMN) : $2x - 2y + 3z + d = 0$

or $M \in (HMN) \iff 1 - 0 + 0 + d = 0 \iff d = -1$

Donc une équation cartésienne de (HMN) est $2x - 2y + 3z - 1 = 0$ 1 0,75

c) $L(x;y;z)$ vérifie $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $(CG) : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \quad (k \in \mathbb{R}) \\ z = k \end{cases}$ et $2x - 2y + 3z - 1 = 0$

$2 \times 1 - 2 \times 1 + 3k - 1 = 0 \iff k = 1/3$ 1 0,75

donc l'intersection de (CG) et (HMN) a pour coordonnées $L(1;1;1/3)$