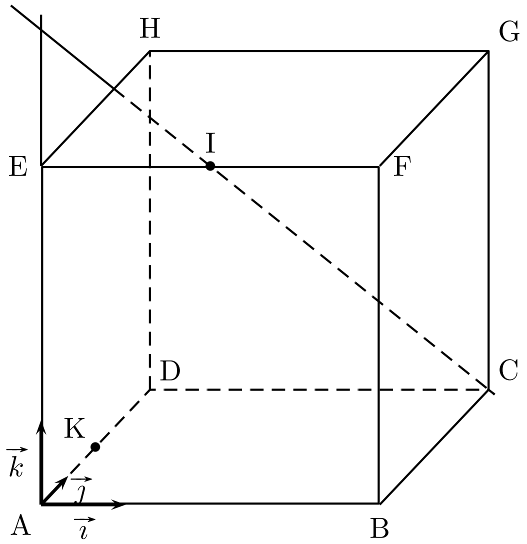
DS N° 7 : Espace (1h15)

I **(15 points)**

On considère un repère orthonormé $\left(A\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ de l'espace dans lequel on place les points

$$B(4\,;\,0\,;\,0),\quad D(0\,;\,4\,;\,0),\quad E(0\,;\,0\,;\,4)$$

et les points C, F, G et H de sorte que le solide ABCDEFGH soit un cube.



1. Donner les coordonnées des points C, F, G et H.

Correction :

De $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 4\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$, on déduit que $C(4\,;\,4\,;\,0)$;
De $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = 4\vec{\imath} + 4\vec{k}$, on déduit que $F(4\,;\,0\,;\,4)$;
De $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 4\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 4\vec{k}$, on déduit que $G(4\,;\,4\,;\,4)$;
De $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 4\vec{\jmath} + 4\vec{k}$, on déduit que $H(0\,;\,4\,;\,4)$.

2. On considère le point I milieu de l'arête [EF].
Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IC) est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 2+2t \\ y & = & 4t \\ z & = & 4-4t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

Correction :

I, milieu de [EF] donc $I\left(\dfrac{x_E+x_F}{2};\dfrac{y_E+y_F}{2};\dfrac{z_E+z_F}{2}\right)$, donc $I(2\ ;\ 0\ ;\ 4)$.

Alors $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (IC) et $I(2;0;-4) \in (IC)$, donc

$$(IC) : \begin{cases} x = 2t+2 \\ y = 4t \\ z = -4t+4 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

3. On désigne par $\mathcal{P}$ le plan orthogonal à la droite (IC) passant par le point G, et par J l'intersection de $\mathcal{P}$ avec (IC).

(a) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est donnée par :

$$x + 2y - 2z - 4 = 0.$$

Correction :

$\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$ et donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
Ainsi, $\mathcal{P} : x + 2y - 2z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.
De plus $G(4;4;4) \in \mathcal{P}$ donc $4 + 8 - 8 + d = 0$ donc $d = -4$ et on a :

$$\mathcal{P} : x + 2y - 2z - 4 = 0.$$

(b) Justifier que J a pour coordonnées $\left(\frac{28}{9}\ ;\ \frac{20}{9}\ ;\ \frac{16}{9}\right)$.
Que représente J par rapport à C ?

Correction :

$$\begin{aligned} J(x;y;z) \in \mathcal{P} \cap (IC) &\iff \begin{cases} x + 2y - 2z - 4 = 0 \\ x = 2t + 2 \\ y = 4t \\ z = -4t + 4 \end{cases} \\ &\iff 2t + 2 + 2(4t) - 2(-4t + 4) - 4 = 0 \qquad \text{Avec } x, y, z, \text{ donné par } (IC) \\ &\iff 18t = 10 \\ &\iff t = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Alors $\begin{cases} x = 2\frac{5}{9} + 2 = \frac{28}{9} \\ y = 4\frac{5}{9} = \frac{20}{9} \\ z = -4\frac{5}{9} + 4 == \frac{16}{9} \end{cases}$.

Donc on a bien $J\left(\frac{28}{9}\ ;\ \frac{20}{9}\ ;\ \frac{16}{9}\right)$.
$(IC) \perp \mathcal{P}$ et J intersection de $\mathcal{P}$ et (IC), donc J est le projeté orthogonal de C sur $\mathcal{P}$.

(c) Vérifier que le point K$(0\,;\,2\,;\,0)$ appartient au plan $\mathcal{P}$.

Correction :

On a : $x_K + 2y_K - 2z_K - 4 = 4 - 4 = 0$ donc $K \in \mathcal{P}$.

(d) Justifier que (BK) est l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et (ABC).

Correction :

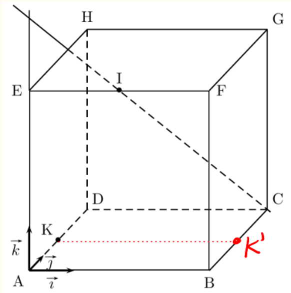
Il suffit de vérifier que B et K sont des points appartenant à $\mathcal{P}$ et (ABC).
$x_B + 2y_B - 2z_B - 4 = 4 - 4 = 0$ donc $B \in \mathcal{P}$. D'autre part $B \in (ABC)$, donc on a bien $B \in \mathcal{P} \cap (ABC)$.
On sait déjà que $K \in \mathcal{P}$ et K est un point de la face $ABCD$ du cube donc $K \in (ABC)$. Au final,

$K \in \mathcal{P} \cap (ABC)$.
On déduit finalement que (BK) est bien la droite d'intersection de $\mathcal{P}$ et (ABC).

4. (a) Déterminer le volume de la pyramide CBKG.

Correction :

On introduit le point $K'(4;2;0)$.
On a $\overrightarrow{KK'}\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{KK'} = 4\vec{i}$ et par propriété du cube $\overrightarrow{KK'}$ est orthogonal à la face $BCGF$. De plus K' est un point de la face $BCGF$ par construction.
Ainsi, KK' est la hauteur du tétraèdre CBKG issue de K ayant pout base CBG.
Alors par propriété : $\mathcal{V}(CBKG) = \frac{1}{3}\mathcal{A}(CBG)KK'$
CBG est rectangle en C et donc $\mathcal{A}(CBG) = \frac{1}{2}16 = 8$ $u.a.$ D'autre part $KK' = 4$.
Finalement $\mathcal{V}(CBKG) = \frac{1}{3}8 \times 4 = \frac{32}{3}$ $u.v.$



(b) Justifier que la droite $(BKG) = \mathcal{P}$.

Correction :

On peut remarquer que $\mathcal{P} = (BKG)$, en effet, nous avons vu $K \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$, et $G \in \mathcal{P}$ par définition de $\mathcal{P}$. Et de plus les points ne sont pas aligné (c'est clair sur le dessin).

(c) Déduire (avec les 2 questions qui précèdent) que l'aire du triangle BKG est égale à 12.

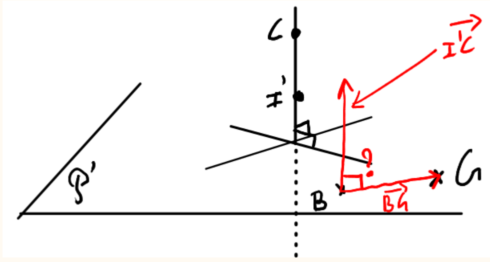
Correction :

De plus nous savons que J est le projeté orthogonal de C sur $\mathcal{P}$.
Il s'en suit si on considère le tétraèdre CBKG comme ayant pour base BKG, alors la hauteur issue de C est $[CJ]$.
on a donc $\mathcal{V}(CBKG) = \frac{1}{3}\mathcal{A}(BKG)CJ$.
Et $\overrightarrow{CJ}\begin{pmatrix}\frac{8}{9}\\\frac{16}{9}\\\frac{15}{9}\end{pmatrix}$, alors $CJ^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{16}{9}\right)^2 = \frac{64+256+256}{81} = \frac{576}{81}$.
Donc CJ $= \frac{8}{3}$.
Ainsi, on a $\mathcal{A}(BKG) = 3\frac{\mathcal{V}(CBKG)}{CJ} = 32 \times \frac{3}{8} = 12$ $u.a.$

(d) On note I$'$ un point de l'arête [EF], et $\mathcal{P}'$ le plan orthogonal à la droite (I$'$ C) passant par G. Peut-on affirmer que la droite (BG) est incluse dans $\mathcal{P}'$?

Correction :

On sait déjà que G est dans $\mathcal{P}'$ par construction, et il s'agit donc de vérifier si c'est le cas pour B. Il suffit donc de vérifier si $\overrightarrow{BG} \perp \overrightarrow{I'C}$ (voir dessin).



Soit $I'(x; y; z)$. On a $I' \in [EF]$, donc $\overrightarrow{EI'} = k\overrightarrow{EF}$ avec $k \in [0; 1]$.
$\overrightarrow{EI'} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $I'(4k; 0; 4)$.
Ainsi on a $\overrightarrow{I'C} \begin{pmatrix} 4-4k \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{I'C}.\overrightarrow{BG} = 16 - 160$.
On a donc $(BG) \subset \mathcal{P}'$

(II) **(5 points)** *Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Les questions de cet exercice sont indépendantes.*
Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(0; 4; -1)$ et $B(6; 1; 5)$.

1. **Affirmation :** Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Correction :

Soit Δ la droite donnée par ces équations paramétriques.
Pour $t = -1$ on obtient $x = 0; y = 4; z = -1$ et en conséquence $A \in \Delta$.
Pour $t = 2$ on obtient $x = 6; y = 1; z = 5$ et en conséquence $B \in \Delta$.
En conséquence $\Delta = (AB)$ et l'affirmation est vraie.

2. **Affirmation :** On considère les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ dont on donne ci-dessous une représentation paramétrique :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t\,; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + t \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}' : \begin{cases} x = 2t' \\ y = 4 - t' \quad t' \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 2t' \end{cases}$$

Alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.

Correction :

Si on regarde les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $\vec{u'} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ les vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, on constate qu'il n'existe pas de coefficient de proportionnalité sur les coordonnées et donc que les vecteurs ne sont pas colinéaires et ainsi les droites ne sont pas parallèles.
On essaie de voir si on a un point d'intersection :

$$M(x;y;z) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' \iff \begin{cases} 3+t = 2t' \\ 1+t = 4-t' \\ 2+t = -1+2t' \end{cases} \quad \text{avec } x, y, z \text{ définis par les paramétrisations des droites.}$$

$$\iff \begin{cases} t-2t' = -3 \\ t+t' = 3 \\ t-2t' = -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t-2t' = -3 & (L_1) \\ t+t' = 3 & (L2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3t' = -6 & (L_1 - L_2) \\ 3t = 3 & (L_1 + 2L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t' = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

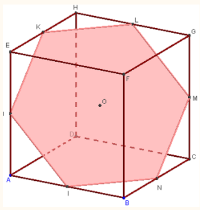
Il s'en suit que le point $M(4;2;3)$ est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et donc les droites sont coplanaires.

III✶

1. Dessiner un cube ainsi qu'une section par un plan de telle sorte que la section soit un hexagone régulier.
2. Peut-on faire en sorte d'obtenir un pentagone régulier ?

Correction :

1. On prend le milieu des arrêtes :



2. Impossible car dans un cube les arrêtes de la section qui se font face doivent être parallèles et ce n'est pas le cas dans un pentagone régulier.