DS N°6 : Autour de ln (2h)

(I) (7 points)

Partie A

$$f(x) = x - \ln(1 + x).$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
   Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f'.
3. (a) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.
   (b) En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$.
4. (a) Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, on a :
   $$f(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\right).$$
   (b) En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n).$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Donner la valeur arrondie au millième de u_1.
2. En utilisant la question 3. a. de la partie A, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 0$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n).

(II) (9 points)

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 3x + 1 - 2x\ln(x)$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. (a) Démontrer que pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = 1 - 2\ln(x)$.
   (b) Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   On fera figurer dans ce tableau les limites ainsi que la valeur exacte de l'extremum.
3. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0\ ;\ +\infty[$. On notera α cette solution.

(b) En déduire le signe de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

(c) Justifier que $\alpha \in [4;6]$.

(d) On considère l'algorithme suivant ou l'instruction `from lycee import *` permet de disposer de la fonction ln.

Il s'agit d'un algorithme de dichotomie pour déterminer un encadrement de α d'amplitude inférieure à 10^{-p}.

```
1  from lycee import *
2  def f(x) :
3    return 3*x+1-2*x*ln(x)
4  
5  def dichotomie(p) :
6    a=4
7    b=6
8    while ....
9      if f(a)*f((a+b)/2) < 0 :
10       b = (a+b)/2
11     else :
12       a=(a+b)/2
13   return (a,b)
```

i. Compléter la ligne 8 qui est manquante.

ii. On lance l'instruction `dichotomie(1)`. Combien de tours de boucles `while` fait alors le script ?

iii. Quelles sont alors les valeurs renvoyées renvoyées par le script ? (arrondies à 10^{-3}).

4. On considère une primitive quelconque de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. On la note F.

   Peut-on affirmer que la fonction F est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$? Justifier.

5. (a) Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   (b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

   (c) Déduire des questions 5. a et 5 .b que pour tout réel x strictement positif :

$$\ln(x) \geqslant 1 - \frac{1}{x}.$$

.

III **(4 points)** Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point :

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$.

   Affirmation : La fonction f est convexe sur $[-3;1]$.

2. **Affirmation :** Pour tout réel x : $1 - \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

   Affirmation : L'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathcal{C}$ en un seul point.

4. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^x\left(1 - x^2\right)$

   Affirmation : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction h n'admet pas de point d'inflexion.