DS N°6 : Autour de ln (2h)

(I) (5 points)

Partie A

$$f(x) = x - \ln(1+x).$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.

Correction :

Sur $]-1\ ;\ +\infty[$, $x+1>0$ et donc $x \longmapsto \ln(1+x)$ est bien définie ainsi que la fonction f.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f'.

Correction :

On a pour $x > -1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{x}{1+x} \end{aligned}$$

3. (a) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.

Correction :

Sur $]-1;+\infty[$, $x+1>0$, donc $f'(x)$ est du signe de x. On déduit alors le tableau de variations de f (sans limites).

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variations de f	||	$\searrow$	0	$\nearrow$	

(b) En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$.

Correction :

D'après le tableau de variation, 0 est le minimum de f atteint en 0. On déduit alors $f(x) > 0$.

4. (a) Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\right).$$

Correction :

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \ln(1+x). \\ &= \ln(\mathrm{e}^x) - \ln(1+x). \\ &= \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\right) \end{aligned}$$

(b) En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f.

Correction :

On a $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x(1+\frac{1}{x})} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$, et par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

Alors par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x} = +\infty$.

De plus $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$,

Alors par composée (avec $X = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}$), on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n).$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Donner la valeur arrondie au millième de u_1.

Correction :

On a $u_1 = f(10) = 10 - \ln(11) \simeq 7,602$.

2. En utilisant la question 3. a. de la partie A, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 0$.

Correction :

On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geqslant 0$.
Initialisation : On a bien pour $n = 0$, $u_0 = 10 > 0$.
Hérédité : pour $k \in \mathbb{N}$, supposons $u_k \geq 0$ et montrons $u_{k+1} \geq 0$.
On a $u_k \geq 0$, et d'après la question 3. a. on a $f(u_k) \geq 0$ et donc $u_{k+1} \geq 0$.
L'hérédité est donc démontrée.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq 0$

3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

Correction :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n + 1)$.
Et de plus

$$\begin{array}{lll} & u_n \geq 0 & \\ \text{donc} & u_n + 1 \geq 1 & \\ \text{donc} & \ln(u_n + 1) \geq 0 & \text{(On applique ln qui est croissante)} \\ \text{donc} & -\ln(u_n + 1) \leq 0 & \end{array}$$

Ainsi $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et donc la suite (u_n) est décroissante.

4. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge.

Correction :

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers $\ell \geq 0$.

5. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Correction :

On a

- $u_{n+1} = f(u_n)$.
- (u_n) vers $\ell \geq 0$.
- f est continue sur $]-1; +\infty[$.

Alors par théorème du point fixe $f(\ell) = \ell$.
Donc $\ln(1 + \ell) = 0$ et par application de la fonction exp, il vient $1 + \ell = 1$ et ainsi $\ell = 0$.

II On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 3x + 1 - 2x\ln(x)$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

Correction :

En 0 : Par théorème de coirssance comparée : $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$,
alors par somme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.
En $+\infty$: On a $f(x) = x(3 - 2\ln x) + 1$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; et par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} 3 - 2\ln x = -\infty$.
On déduit donc par produit et somme que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

2. (a) Démontrer que pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = 1 - 2\ln(x)$.

Correction :

On a pour $x > 0$:
$f'(x) = 3 + 0 - 2 \times \ln(x) - 2x \times \dfrac{1}{x} = 3 - 2\ln(x) - 2 = 1 - 2\ln(x)$

(b) Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. On fera figurer dans ce tableau les limites ainsi que la valeur exacte de l'extremum.

Correction :

$$\begin{aligned} & f'(x) > 0 \\ \iff & 1 - 2\ln(x) > 0 \\ \iff & \ln(x) < \frac{1}{2} \\ \iff & x < \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \qquad \text{Car ln est strictement croissante} \end{aligned}$$

On déduit alors le tableau de variations :

x	0		$\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	1	$\nearrow$	$2\sqrt{\mathrm{e}}+1$	$\searrow$	$-\infty$

Et on a $f(\sqrt{\mathrm{e}}) = 3\sqrt{\mathrm{e}} + 1 - 2\sqrt{\mathrm{e}}\ln(\sqrt{\mathrm{e}}) = 2\sqrt{\mathrm{e}} + 1$

3. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0\,;\,+\infty[$. On notera α cette solution.

Correction :

Sur $]0; \sqrt{\mathrm{e}}]$, le minimum de f est 1 donc f n'admet pas de racine.
Sur $[\sqrt{\mathrm{e}}; +\infty[$:

- f strictement décroissante.
- f continue (car dérivable)
- $f(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}) = 2\sqrt{\mathrm{e}} + 1 > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} = -\infty$ et $0 \in]-\infty; 2\sqrt{\mathrm{e}} + 1]$.

donc par corollaire du théorème des valeurs intermédiaires $f(x) = 0$ admet une unique racine $\alpha \in [\sqrt{\mathrm{e}}; +\infty[$ et donc sur $]0; +\infty[$.

(b) En déduire le signe de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

Correction :

On déduit du tableau de variations le tableau de signes suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	

(c) Justifier que $\alpha \in [4;6]$.

Correction :

D'après la calculatrice $f(4) > 0$ et $f(6) < 0$. De plus f est continue, donc par théorème des valeurs intermédiaires f s'annule sur $[4;6]$. α étant unique, on a $\alpha \in [4;6]$.

(d) On considère l'algorithme suivant ou l'instruction `from lycee import *` permet de disposer de la fonction ln.
Il s'agit d'un algorithme de dichotomie pour déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-p}.

```
1  from lycee import *
2  def f(x) :
3    return 3*x+1-2*x*ln(x)
4
5  def dichotomie(p) :
6    a=4
7    b=6
8    while ....
9      if f(a)*f((a+b)/2) < 0 :
10       b = (a+b)/2
11     else :
12       a=(a+b)/2
13   return (a,b)
```

i. Compléter la ligne 8 qui est manquante.

Correction :

Ligne 8 : `while b-a > 10**(-p) :`

ii. On lance l'instruction `dichotomie(1)`. Combien de tours de boucles `while` fait alors le script ?

Correction :

Au départ, l'intervalle est de longueur 2.A chaque tour de boucle la longueur de l'intervalle est divisé par 2. L'intervalle de départ est de longueur 2, alors au bout de n tours de boucles, la longueur de l'intervalle est de $\dfrac{2}{2^n}$. On cherche n pour que $\dfrac{2}{2^n} < 0,1$, et de tête on calcule que $n = 5$. (on peut aussi résoudre l'inéquation.)

iii. Quelles sont alors les valeurs renvoyées renvoyées par le script ? (arrondies à 10^{-3}).

Correction :

Les valeurs renvoyées sont $a = 4,9375$ et $b = 5$.

4. On considère une primitive quelconque de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. On la note F. Peut-on affirmer que la fonction F est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$? Justifier.

Correction :

F primitive de f, donc $F' = f$ et d'après le tableau de signe de f, f change de signe sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$, donc F' change de signe et donc F change de variations.
On ne peut pas affirmer que F décroissante sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$.

5. (a) Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Correction :

On a pour $x > 0$: $f''(x) = -\dfrac{2}{x}$.
Donc sur $]0;+\infty[$, $f''(x) < 0$ et donc f est concave.

(b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Correction :

Par propriété on a : $T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
Et $f'(1) = 1\,;\ f(1) = 4$.
Alors $T : y = x - 1 + 4$ donc $T : y = x + 3$.

(c) Déduire des questions 5. a et 5 .b que pour tout réel x strictement positif :

$$\ln(x) \geqslant 1 - \frac{1}{x}.$$

.

Correction :

La fonction étant concave, elle est au-dessous de ces tangentes. On a donc en particulier pour $x > 0$:

$$\begin{array}{ll} & f(x) \leq x + 3 \\ \text{donc} & 3x + 1 - 2x\ln(x) \leq x + 3 \\ \text{donc} & 2x - 2 \leq 2x\ln(x) \\ \text{donc} & 1 - \dfrac{1}{x} \leq \ln(x) \qquad \text{(En divisant par } 2x > 0) \end{array}$$

Ainsi, on a bien l'inégalité demandée.

III Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point :

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$.
Affirmation : La fonction f est convexe sur $[-3; 1]$.

Correction :

On a $f'(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}$ et

$f''(x) = \dfrac{2(x^2+2x+2)-(2x+2)^2}{(x^2+2x+2)^2} = \dfrac{-2x^2-4x}{(x^2+2x+2)^2} = \dfrac{-2x(x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$

On a :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$-2x(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On a $f''(x) \geq 0$ sur $[0;2]$ donc f est convexe sur $[0;2]$ (et concave ailleurs) . **l'affirmation est vraie**

2. **Affirmation :** Pour tout réel x : $1 - \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

Correction :

Pour tout réel x :

$1 - \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{1+\mathrm{e}^x-1+\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{2\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

où la dernière égalité s'obtient en multipliant numérateur et dénominateur par e^{-x}. **l'affirmation est vraie**

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

Affirmation : L'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathcal{C}$ en un seul point.

Correction :

On a $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}(2-x)$

$f'(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = 2$ donc nous avons deux tangentes horizontales.

En 0 : $f(0) = 0$, donc l'axe (Ox) est tangent à $\mathcal{C}$

En 2 : $f(2) = 4\mathrm{e}^{-2} \neq 0$ donc l'axe (Ox) n'est pas tangent à $\mathcal{C}$.

Finalement l'axe (Ox) est tangent à $\mathcal{C}$ uniquement en $x = 0$.

l'affirmation est vraie

4. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^x\left(1-x^2\right)$

Affirmation : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction h n'admet pas de point d'inflexion.

Correction :

On a $f'(x) = \mathrm{e}^x(1-x^2) - 2x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(1-2x-x^2)$

et $f''(x) = \mathrm{e}^x(1-2x-x^2) + \mathrm{e}^x(-2-2x) = \mathrm{e}^x(-1-4x-x^2) = -\mathrm{e}^x(x^2+4x+1)$.

Le discriminant de x^2+4x+1 est positif, donc x^2+4x+1 change de signe deux fois. Donc f'' change de signe deux fois et donc on a deux points d'inflexion.

l'affirmation est fausse