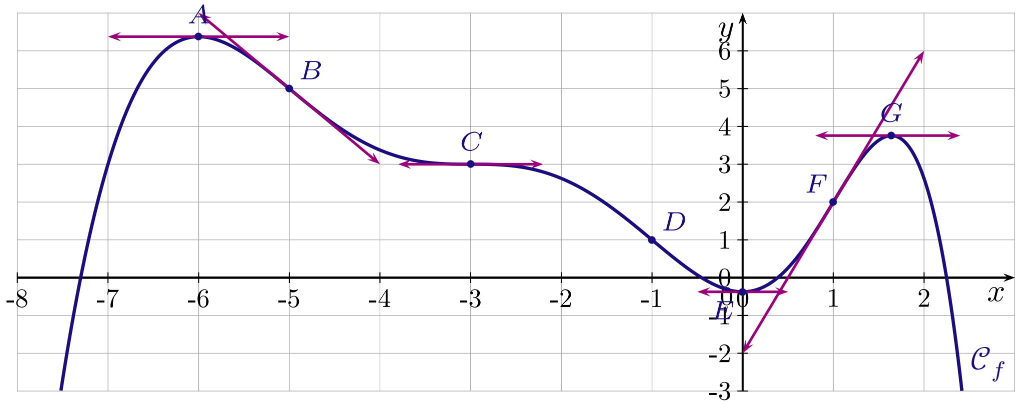
DS N° 5 : Convexité (30 min)

(I) (5 points)

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



On note f' la dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f.

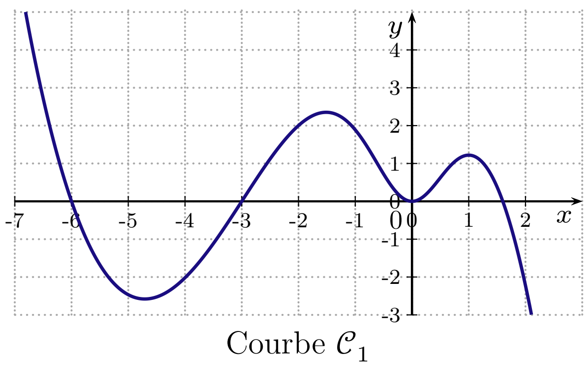
1. On a $f'(1) = \dots\dots$

2. (a) $f'(-5) = \dots\dots$ (b) $f''(-5) = \dots\dots$
   .

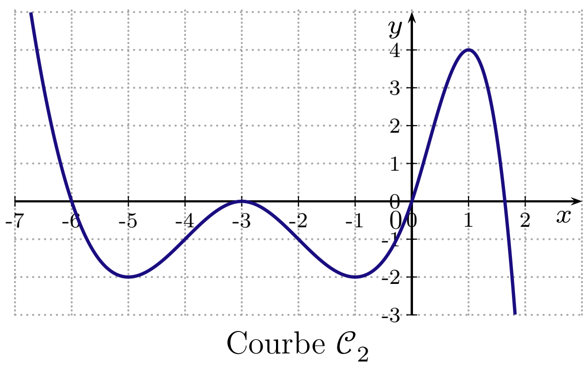
3. Compléter dans chacun des cas, par l'un des trois symboles $\leqslant$, $=$ ou $\geqslant$:

   (a) $f'(-6) \cdots 0$ (b) $f''(-4) \cdots 0$ (c) $f'(-4) \cdots 0$ (d) $f''(1) \cdots 0$

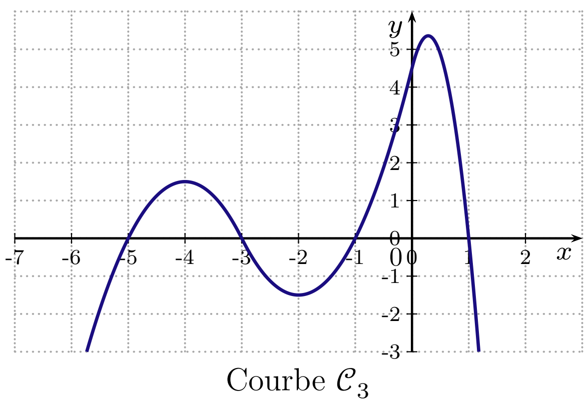
4. Une des quatre courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ ci-dessous est la courbe représentative de la dérivée f' et une autre la courbe représentative de la dérivée seconde f''.
   Déterminer la courbe qui représente la dérivée f' et celle qui représente la dérivée seconde f''. Vous l'écrirez de manière lisible sur le graphique.



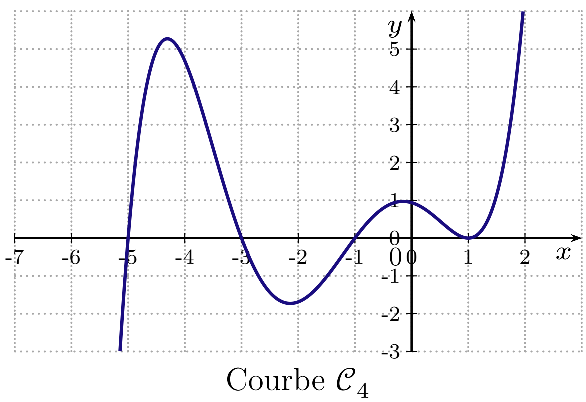
Courbe $\mathcal{C}_1$



Courbe $\mathcal{C}_2$



Courbe $\mathcal{C}_3$



Courbe $\mathcal{C}_4$

II **(15 points)** On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x^2 + 4x + 5)\mathrm{e}^{-x}$$

1. Déterminer f'.
2. Dresser le tableau de variations de f (sans les limites).
3. On note f'' la fonction dérivée de f'. Montrer que

$$f''(x) = (x^2 - 1)\mathrm{e}^{-x}$$

4. Étudier le signe de f'' et en déduire la convexité de f.
5. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
   La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle un (ou plusieurs) point(s) d'inflexion ? Si oui, donner ses (leurs) coordonnées.
6. (a) Déterminer la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ en 0.
   (b) Déduire de ce qui précède la position relative de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$ sur $[-1; 1]$.