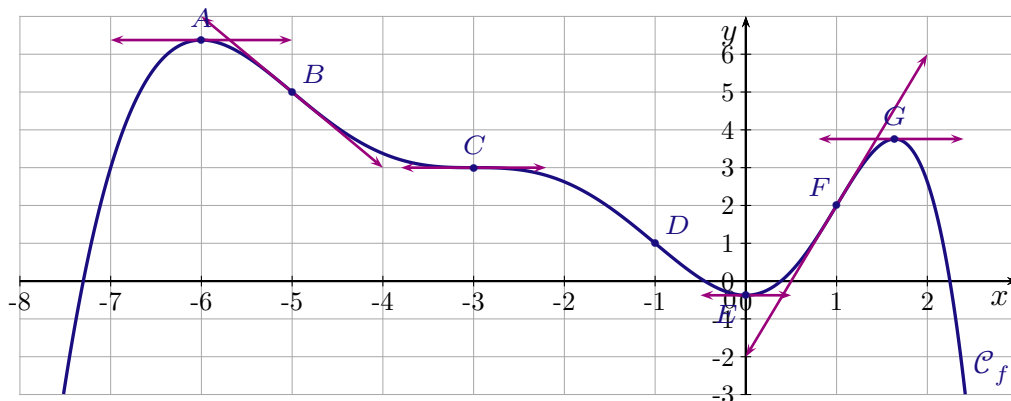


DS N° 5 : Convexité (30 min)

I (5 points)

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



On note f' la dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f .

1. On a $f'(1) = 4$

2. (a) $f'(-5) = -2$

(b) $f''(-5) = 0$

3. Compléter dans chacun des cas, par l'un des trois symboles $\leq$, $=$ ou $\geq$:

(a) $f'(-6) = 0$

(b) $f''(-4) > 0$

(c) $f'(-4) < 0$

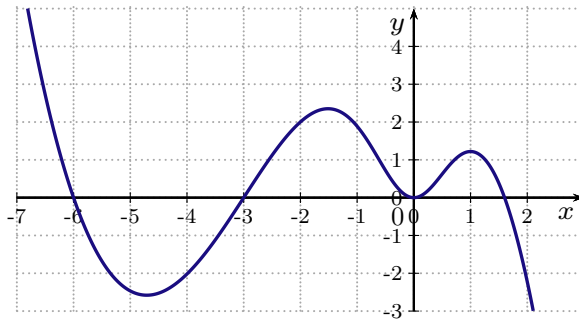
(d) $f''(1) = 0$

4. Une des quatre courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ ci-dessous est la courbe représentative de la dérivée f' et une autre la courbe représentative de la dérivée seconde f'' .

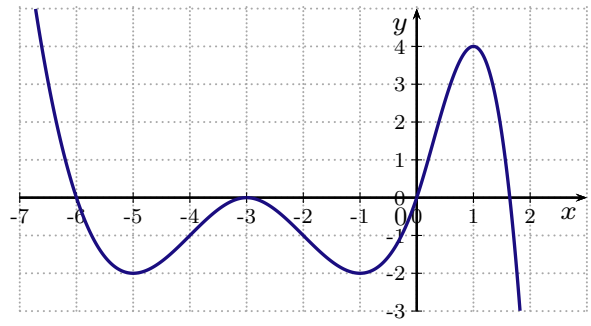
Déterminer la courbe qui représente la dérivée f' et celle qui représente la dérivée seconde f'' . Vous l'écrirez de manière lisible sur le graphique.

Correction :

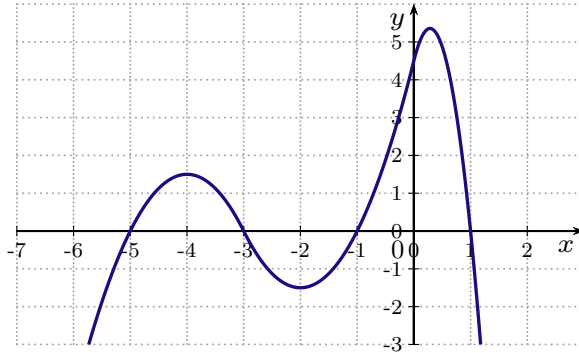
$\mathcal{C}_2$ représente f' et $\mathcal{C}_3$ représente f''



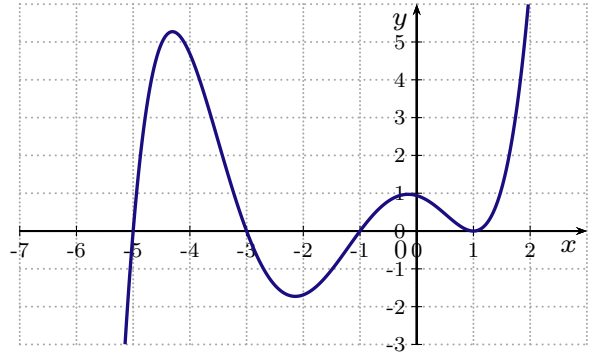
Courbe $\mathcal{C}_1$



Courbe $\mathcal{C}_2$



Courbe $\mathcal{C}_3$



Courbe $\mathcal{C}_4$

II (15 points) On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x^2 + 4x + 5)e^{-x}$$

- Déterminer f' .

Correction :

On a en utilisant la dérivée du produit : pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -e^{-x}(x+1)^2$$

- Dresser le tableau de variations de f (sans les limites).

Correction :

Sur $\mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ et $(x+1)^2 > 0$ donc par produit $f'(x) < 0$ et donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

- On note f'' la fonction dérivée de f' . Montrer que

$$f''(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$$

Correction :

Il n'y a qu'à savoir dériver...

- Étudier le signe de f'' et en déduire la convexité de f .

Correction :

Il s'agit de dresser le tableau de signe de $f''(x)$ qui est donné par le signe de $(x^2 - 1)$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

Alors

- Sur $]-\infty; -1]$, f est convexe.
- Sur $[-1; 1]$, f est concave.
- Sur $[1; +\infty[$, f est convexe.

5. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f .

La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle un (ou plusieurs) point(s) d'inflexion ? Si oui, donner ses (leurs) coordonnées.

Correction :

En 1 et -1 , f'' s'annule en changeant de signe, ainsi f admet deux points d'inflexion :

$A_1(-1; 2e)$ et $A_2(1; 10e^{-1})$

6. (a) Déterminer la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ en 0 .

Correction :

On a $\mathcal{T} : y = f'(0)x + f(0)$.

Et $f(0) = 5$ et $f'(0) = -1$.

Donc $\mathcal{T} : y = -x + 5$.

(b) Dédurre de ce qui précède la position relative de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$ sur $[-1; 1]$.

Correction :

Sur $[-1; 1]$, f est concave. Donc, sur cet intervalle $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de sa tangente $\mathcal{T}$.