DS N° 4 : Suites et continuité (2h)

I (11 points)

Partie A :

On considère la fonction h définie sur $[0\,;+\infty[$ par $h(x) = x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + 2$.

1. Déterminer la limite h en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de h et montrer que pour $x \geq 0$:

$$h'(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$$

3. En déduire le tableau de variations de h.
4. Montrer qu'il existe un unique réel $a \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $h(a) = 0$ et que $a > 1$.
5. En déduire le signe de h sur $[0\,;+\infty[$.
6. On donne le programme Python ci-contre :

```python
def script(h):
  x=1
  while h(x)*h(x+h)>0 :
   x=x+h
  print(x,x+h)
```

Que fait ce script ? Quelles sont les valeurs renvoyées par `script(0.01)` et que signifient-t'elles ?

Partie B :

Soit la fonction numérique f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x^2}.$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.
2. On rappelle qu'à l'aide du taux d'accroissement de la fonction exponentielle, on montre que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

A l'aide de ce dernier résultat, déterminer la limite de f en 0.

3. Montrer que pour $x > 0$ on a

$$f'(x) = \frac{h(x)}{x^3}$$

4. En déduire le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.
5. Montrer que $f(a) = \dfrac{1}{a(2-a)}$.
6. On admet que $1,5 < a < 1,6$. En étudiant la fonction $g(x) = \dfrac{1}{x(2-x)}$ sur l'intervalle $[1; 2]$, déterminer un encadrement de $f(a)$.

II **(9 points)** Pour n entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$ et donner une interprétation géométrique.
2. Montrer que pour $x \geq 0$:
$$f_n'(x) = \frac{2n}{(x+n)^2} + \mathrm{e}^{-x}$$
3. Dresser le tableau de variation de f_n.
4. Calculer $f_n(n)$; quel est son signe ?
5. (a) Démontrer, par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{n+1} > 2n+1$.
   (b) Montrer que $f_n(n+1) > 0$.
6. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique sur $[n; n+1]$; cette solution sera notée α_n.
7. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\alpha_n}{n}$.

III✳ Démontrer (à l'aide du taux de variations des fonctions f et g) la règle de l'Hôpital dont l'énoncé est le suivant :

Théorème 1. *Soient f et g deux fonctions dérivables sur I et $a \in I$. On suppose $f(a) = g(a) = 0$ et $g'(a) \neq 0$. On a alors*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$