DS N°4 : Suites et continuité (2h)

I **(11 points)**

Partie A :

On considère la fonction h définie sur $[0\,;+\infty[$ par $h(x) = x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + 2$.

1. Déterminer la limite h en $+\infty$.

Correction :

Pour $x \geq 0$ on a $h(x) = \mathrm{e}^x(x-2) + 2$.
Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-2) = +\infty$
donc par produit et somme $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

2. Calculer la dérivée de h et montrer que pour $x \geq 0$:

$$h'(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$$

Correction :

Pour $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x \\ &= (x-1)\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

3. En déduire le tableau de variations de h.

Correction :

Pour $x \geq 0$, $\mathrm{e}^x > 0$, donc $h'(x)$ et du signe de $x-1$ (affine).
On déduit le tableau de variation de h :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	0	$\searrow$	$2-\mathrm{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Montrer qu'il existe un unique réel $a \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $h(a) = 0$ et que $a > 1$.

Correction :

Pour $x \in]0;1]$, h est strictement négative d'après le tableau de variations, donc h n'a pas de racine sur $]0;1]$.

Pour $x \in [1;+\infty[$,

- h strictement croissante.
- h continue
- $h(1) = 2 - \mathrm{e} < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ avec $0 \in [2-\mathrm{e};+\infty[$.

donc par corollaire du théorème des valeurs intermédiaires $h(x) = 0$ admet une unique racine $a \in [1;+\infty[$.
Finalement, sur $]0;+\infty[$, $h(x) = 0$ admet une unique racine $a > 1$.

5. En déduire le signe de h sur $[0 ;+\infty[$.

Correction :

On a alors le tableau de signes suivant :

x	0		a		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

6. On donne le programme Python ci-contre :

```python
def script(h):
  x=1
  while h(x)*h(x+h)>0 :
   x=x+h
  print(x,x+h)
```

Que fait ce script ? Quelles sont les valeurs renvoyées par `script(0.01)` et que signifient-t'elles ?

Correction :

Il s'agit d'un script de recherche d'un encadrement de la racine a de h par encadrement. La valeur renvoyée par `script(0.01)` est un encadrement de a à 10^{-2}. Les deux valeurs renvoyées sont les bornes de l'encadrement.
On a : $1,59 < a < 1,60$.

Partie B :
Soit la fonction numérique f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x^2}.$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Correction :

On a pour $x > 0$: $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}$.

Alors par croissance comparée : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

donc par somme : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. On rappelle qu'à l'aide du taux d'accroissement de la fonction exponentielle, on montre que
$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$
A l'aide de ce dernier résultat, déterminer la limite de f en 0.

Correction :

On a $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \times \frac{1}{x}$.
Et $\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$, et par quotient $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.
Donc par produit : $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

3. Montrer que pour $x > 0$ on a
$$f'(x) = \frac{h(x)}{x^3}$$

Correction :

Pour $x > 0$, par dérivation du quotient, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2\mathrm{e}^x - 2x(\mathrm{e}^x - 1)}{x^4} \\ &= \frac{x(x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + 2)}{x^4} \\ &= \frac{h(x)}{x^3} \end{aligned}$$

4. En déduire le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.

Correction :

Sur $\mathbb{R}_+^\star$, $x^3 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $h(x)$ et on déduit donc le tableau de variations de f.

x	0		a		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $+\infty$	↘	$f(a)$	↗	$+\infty$

5. Montrer que $f(a) = \frac{1}{a(2-a)}$.

Correction :

On a $h(a) = 0$, donc $\mathrm{e}^a(a-2) = -2$ et donc $\mathrm{e}^a = -\dfrac{2}{a-2}$.
On déduit alors :

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{\mathrm{e}^a - 1}{a^2} \\ &= \frac{-\dfrac{2}{a-2} - 1}{a^2} \\ &= \frac{-\dfrac{a}{a-2}}{a^2} \\ &= \frac{1}{a(2-a)} \end{aligned}$$

6. On admet que $1,5 < a < 1,6$. En étudiant la fonction $g(x) = \dfrac{1}{x(2-x)}$ sur l'intervalle $[1;2]$, déterminer un encadrement de $f(a)$.

Correction :

g est dérivable sur $[1;2]$ et $g'(x) = \dfrac{2x-2}{x^2(2-x)^2}$. Il s'ensuit que $g'(x)$ est du signe de $2x - 2x$ et donc sur $[1;2]$, $g'(x) > 0$ et g est croissante sur $[1;2]$.
Donc on a :

$$\begin{aligned} & 1,5 < a < 1,6 \\ \text{Donc} \quad & g(1,5) < g(a) < g(1,6) \qquad \text{Car } g \text{ est croissante sur } [1;2] \\ \text{Donc} \quad & \frac{1}{1,5 \times 0,5} < g(a) < \frac{1}{1,6 \times 0,4} \\ \text{Donc} \quad & \frac{1}{0,75} < g(a) < \frac{1}{0,64} \\ \text{Donc} \quad & 1,33 < g(a) < 1,57 \qquad \text{(Attention d'agrandir l'intervalle ici).} \end{aligned}$$

De plus d'après la question précédente, $g(a) = f(a)$ et donc :

$$1,33 < f(a) < 1,57$$

II **(9 points)** Pour n entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$ et donner une interprétation géométrique.

Correction :

Pour $x \geq 0$, on a $f_n(x) = \dfrac{1 - n/x}{1 + n/x} - \mathrm{e}^{-x}$.
Par par quotient $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1 - n/x}{1 + n/x} = 1$ et par composée $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$.
Donc par somme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 1$.
Cela signifie que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

2. Montrer que pour $x \geq 0$:

$$f_n'(x) = \frac{2n}{(x+n)^2} + \mathrm{e}^{-x}$$

Correction :

Pour $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{(x+n) - (x-n)}{(x+n)^2} + e^{-x} \\ &= \frac{2n}{(x+n)^2} + e^{-x} \end{aligned}$$

3. Dresser le tableau de variation de f_n.

Correction :

Chaque terme de la somme de $f_n'(x)$ est positif donc par somme $f_n'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+$.
On déduit alors le tableau de variations de f_n :

x	0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
Variations de f	$-1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	1

4. Calculer $f_n(n)$; quel est son signe ?

Correction :

On a $f_n(n) = -\mathrm{e}^{-n}$ donc $f_n(n) < 0$.

5. (a) Démontrer, par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{n+1} > 2n + 1$.

Correction :

On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $\mathrm{e}^{n+1} > 2n + 1$.
Initialisation : On a bien pour $n = 1$: $\mathrm{e}^2 > 5$.

Hérédité : Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, supposons $\mathrm{e}^{k+1} > 2k+1$ et montrons $\mathrm{e}^{k+2} > 2k+3$.
On a :

$$\begin{array}{lll} & \mathrm{e}^{k+1} > 2k+1 & \\ \text{Donc} & \mathrm{e}^{k+2} > (2k+1)\mathrm{e} & \text{(par produit par } \mathrm{e} > 0) \end{array}$$

Et nous devons donc montrer que $(2k+1)\mathrm{e} > 2k+3$.
Pour cela, déterminons le signe de $(2k+1)\mathrm{e} - (2k+3)$:
On a : $(2k+1)\mathrm{e} - (2k+3) = 2k(\mathrm{e}-1) + \mathrm{e} - 3$.
et $k \in \mathbb{N}^\star$, donc $2k \geq 2$ et donc $2k(\mathrm{e}-1) \geq 2(\mathrm{e}-1)$.
Il s'ensuit $(2k+1)\mathrm{e} - (2k+3) \geq 3\mathrm{e} - 5 > 0$.
Ainsi, finalement $\mathrm{e}^{k+2} > 2k+3$ et l'hérédité est démontrée.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $\mathrm{e}^{n+1} > 2n+1$.

(b) Montrer que $f_n(n+1) > 0$.

Correction :

On a $f_n(n+1) = \dfrac{1}{2n+1} - \mathrm{e}^{-(n+1)}$
D'après la question précédente :
$n \in \mathbb{N}^\star$: $\mathrm{e}^{n+1} > 2n+1$, alors par inverse (fonction décroissante de $\mathbb{R}_+^\star$),
on a : $\mathrm{e}^{-(n+1)} < \dfrac{1}{2n+1}$
et donc $\dfrac{1}{2n+1} - \mathrm{e}^{-(n+1)} > 0$
ce qui montre $f_n(n+1) > 0$.

6. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique sur $[n; n+1]$; cette solution sera notée α_n.

Correction :

Sur $[n; n+1]$:

- f strictement croissante.
- f continue (car dérivable)
- $f_n(n) < 0$, $f_n(n+1) > 0$ donc 0 est intermédiaire à $f_n(n)$ et $f_n(n+1)$.

donc par corollaire du théorème des valeurs intermédiaires $f_n(x) = 0$ admet une unique racine $\alpha_n \in [n; n+1]$.

7. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_n}{n}$.

Correction :

D'après ce qui précède, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $n \leq \alpha_n \leq n+1$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc par théorème de comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$.
D'autre part par quotient par $n > 0$,

on a : $1 \leq \dfrac{\alpha_n}{n} \leq 1 + \dfrac{1}{n}$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$, donc par théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\alpha_n}{n} = 1$.

III✶ Démontrer (à l'aide du taux de variations des fonctions f et g) la règle de l'Hôpital dont l'énoncé est le suivant :

Théorème 1. *Soient f et g deux fonctions dérivables sur I et $a \in I$. On suppose $f(a) = g(a) = 0$ et $g'(a) \neq 0$. On a alors*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$