DS N° 3 : Limites de fonctions (0h30)

I Déterminer dans chaque cas la limite de f à l'endroit indiqué.

$f_1(x) = \dfrac{3x-5}{x^2-4x+3}$; en 1^+

$f_2(x) = \dfrac{x^3 e^x - x^2}{x^2 e^{2x} - x}$; en $+\infty$

$f_3(x) = \left(2 - \dfrac{1}{e^x}\right)^5$; en $-\infty$

$f_4(x) = \dfrac{-3x^2+5x+2}{x-2}$; en 2^-

Correction :

1.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a $\lim\limits_{x\to 1} 3x-5 = -2$, et d'après le tableau de signe : $\lim\limits_{x\to 1^+} x^2-4x+3 = 0^-$.

Alors par quotient, $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3x-5}{x^2-4x+3} = +\infty$.

2. On a

$$f_2(x) = \frac{x^3 e^x (1 - \frac{1}{xe^x})}{x^2 e^{2x}(1 - \frac{1}{xe^{2x}})} = \frac{x(1-\frac{1}{xe^x})}{e^x(1-\frac{1}{xe^{2x}})}$$

On a d'après les opérations sur les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{xe^x} = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{xe^{2x}} = 1$

Et d'après le théorème de croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

Alors finalement par produit et quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = 0$.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$, donc par inverse, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^x} = +\infty$. On déduit donc que :

• $\lim\limits_{x\to-\infty} 2 - \dfrac{1}{e^x} = -\infty$

D'autre part, par produit : • $\lim\limits_{X\to-\infty} X^5 = -\infty$

Et donc par composée (avec $X = 2 - \dfrac{1}{e^x}$), on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x) = -\infty$

4. On constate que $-3x^2+5x+2 = (x-2)(-3x-1)$ (car 2 est racine évidente).

Alors $f_4(x) = \dfrac{(x-2)(-3x-1)}{x-2} = -3x-1$.

Il s'ensuit que $\lim\limits_{x \to 2} f_4(x) = -7$.

II Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui satisfait

$$x < f(x) < 2x$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Correction :

$\lim\limits_{x \to 0} x = \lim\limits_{x \to 0} 2x = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x^2}$

Correction :

Pour $x \neq 0$, on a $x^2 > 0$ donc par quotient,

$$\frac{1}{x} < \frac{f(x)}{x^2} < 2\frac{1}{x}$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x^2} = +\infty$.

Spé math (terminale) *11 novembre 2024.*

DS N° 3 : Limites de fonctions (0h30)

I Déterminer dans chaque cas la limite de f à l'endroit indiqué.

$f_1(x) = \dfrac{3x-5}{1-\mathrm{e}^x}$; en 0^+

$f_2(x) = x\mathrm{e}^x - x^2$; en $+\infty$

$f_3(x) = \dfrac{1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$; en 1^-

$f_4(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$; en 3^+

Correction :

1. On a $1-\mathrm{e}^x > 0 \iff \mathrm{e}^0 > \mathrm{e}^x \iff 0 > x$, on déduit alors le tableau de signes suivants :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$1-\mathrm{e}^x$	$+$	0	$-$

On a $\lim\limits_{x\to 0} 3x-5 = -5$, et d'après le tableau de signe : $\lim\limits_{x\to 0^+} 1-\mathrm{e}^x = 0^-$.
Alors par quotient, $\lim\limits_{x\to 0^+} f_1(x) = +\infty$.

2. On a

$$\begin{aligned} f_2(x) &= x\mathrm{e}^x - x^2 \\ &= x\mathrm{e}^x\left(1-\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right) \end{aligned}$$

On a d'après les opérations sur les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^x = +\infty$;

Et d'après le théorème de croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right) = 1$.

Alors finalement par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$.

3. On a :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

D'après le tableau on a :

- $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$.

Par croissance comparée :

- $\lim\limits_{X\to-\infty} X\mathrm{e}^X = 0$.

Et donc par composée (avec $X = \dfrac{1}{x-1}$), on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x) = 0$

4. On constate que $x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$ (car 3 est racine évidente).
   Alors $f_4(x) = \dfrac{(x-3)(x-1)}{x-3} = x - 1$.
   Il s'ensuit que $\lim\limits_{x \to 3} f_4(x) = 2$.

II Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui satisfait

$$x^2 < f(x) < 2x^2$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

   Correction :

   $\lim\limits_{x \to +\infty} x = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = +\infty$,
   donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$

   Correction :

   On a $\mathrm{e}^x > 0$ donc par quotient,

   $$\frac{x^2}{\mathrm{e}^x} < \frac{f(x)}{\mathrm{e}^x} < 2\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}$$

   par inverse de la croissance comparée : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$.

   De même, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$.

   Alors d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x} = 0$.