DS N° 2 : Suites (1h30)

I (8 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

1. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \geqslant n + 1.$$

   (b) En déduire la limite de la suite (u_n).

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - n - 1.$$

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

   (c) En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

3. On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^7$.

   (a) Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.

   (b) Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

```python
def suite:
    u=3
    n=0
    while .... :
        u=....
        n=n+1
    return(n)
```

II (6 points)

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

   On admet que cette fonction est dérivable sur ce même intervalle.
   Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = f(u_n)$. On admet que la suite de terme général u_n est bien définie pour tout entier naturel n.

   Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

3. En déduire que la suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite.

4. Montrer que $u_{n+1}^2 - u_n - 1 = 0$ puis en déduire que $\ell^2 - \ell - 1 = 0$.
5. En déduire la valeur de ℓ.

III (5 points)

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}.$$

1. (a) Calculer $u_1 ; v_1$.
   (b) Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$. Montrer que (w_n) est géométrique de raison $\frac{2}{15}$.
   (c) En déduire la forme explicite de (w_n) puis sa limite.
   (d) On admet que (u_n) et (v_n) convergent. Montrer qu'alors elles ont la même limite.
2. **Hors barême (à garder pour la fin).**. Le but est de montrer que (u_n) et (v_n) convergent.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
   (b) Déduire des résultats des questions précédentes que (u_n) est majorée et (v_n) minorée.
   (c) En déduire que tes suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.
3. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 10v_n$ est constante.
   En déduire la limite commune des suites (u_n) et (v_n).

IV

(1 point) Soit (u_n) une suite satisfaisant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} + nu_n = 3$$

Montrer que si (u_n) converge, alors sa limite est nulle.