DS N° 2 : Suites (1h30)

I (8 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

1. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \geqslant n + 1.$$

Correction :

Initialisation : $u_0 = 3$ et $0 + 1 = 1$.
$3 \geqslant 1$. La proposition est donc vraie au rang $n = 0$.
Hérédité : On suppose la proposition vraie au rang $k \in \mathbb{N}$, $u_k \geqslant k + 1$ (hypothèse de récurrence). On va vérifier qu'alors elle est vraie au rang suivant.
On a : $u_k \geqslant k + 1$

donc $5u_k \geqslant 5(k + 1)$ ($\times 5$ avec $5 > 0$)
donc $5u_k - 4k - 3 \geqslant 5k + 5 - 4k - 3$ (par somme)
et donc $u_{k+1} \geqslant k + 2 = (k + 1) + 1$
Ainsi, la proposition est donc héréditaire.

Conclusion : la proposition est initialisée et est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie

(b) En déduire la limite de la suite (u_n).

Correction :

On a $u_n \geq n+1$ pour tout entier n et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$. Donc par théorème de comparaison, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - n - 1.$$

(a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

Correction :

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) - 1 \\ &= 5u_n - 4n - 3 - n - 1 - 1 \\ &= 5\left(u_n - n - 1\right) \\ &= 5v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 - 1 = 2$.

(b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

Correction :

Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = 2$, on a par propriété :

$$\boxed{v_n = 2 \times 5^n}$$

(c) En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

Correction :

Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - n - 1$, donc $u_n = v_n + n + 1$, et donc :

$$\boxed{u_n = 2 \times 5^n + n + 1}$$

3. On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^7$.
   (a) Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.
   (b) Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

```
1 def suite:
2     u=3
3     n=0
4     while .... :
5         u=....
6         n=n+1
7     return(n)
```

Correction :

ligne 4 : `while u<10**7 :`
ligne 5 : `u=5*u-4*n-3`
A l'aide de la calculatrice, la valeur renvoyée par le prgramme est ???

II (6 points)

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

On admet que cette fonction est dérivable sur ce même intervalle.
Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Correction :

f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on a pour $x \geq 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.
Donc par quotient, $f'(x) > 0$ et donc f est strictement croissante.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = f(u_n)$. On admet que la suite de terme général u_n est bien définie pour tout entier naturel n.

   Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

Correction :

On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$
Initialisation : $u_0 = 5$, $u_1 = \sqrt{6}$ et donc on a bien pour $n = 0$: $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$.
Hérédité : pour $k \in \mathbb{N}$, supposons $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k$
On a :

$$\begin{array}{llll} & 1 & \leqslant u_{k+1} & \leqslant u_k \\ \text{Donc} & f(1) & \leqslant f(u_{k+1}) & \leqslant f(u_k) \qquad (\text{car } f \text{ est croissante pour } x > 0) \\ \text{Donc} & \sqrt{2} & \leqslant u_{k+2} & \leqslant u_{k+1} \end{array}$$

Et $\sqrt{2} \geq 1$ donc on a $1 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 0$ qui est la propriété au rang $k+1$. et l'hérédité est démontrée.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

3. En déduire que la suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite.

Correction :

D'après ce qui précéde, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1, donc par théorème, elle converge vers $\ell \geq 1$

4. Montrer que $u_{n+1}^2 - u_n - 1 = 0$ puis en déduire que $\ell^2 - \ell - 1 = 0$.

Correction :

Par définition de la suite (u_n), on a $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$, donc en appliquant la fonction carrée, on obtient $u_{n+1}^2 = u_n + 1$ et finalement, on a bien $u_{n+1}^2 - u_n - 1 = 0$.
D'après les règles d'opérations sur les limites, on a par produit et somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1}^2 - u_n - 1 = \ell^2 - \ell - 1$ et donc on a $\ell^2 - \ell - 1 = 0$.

5. En déduire la valeur de ℓ.

Correction :

Cette dernière équation est une équation de degré 2. On a le discriminant qui vaut $\Delta = 5$ et on deux solutions : $\ell = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (donc refusée car $\ell \geq 1$) et $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ qui est donc la limite de (u_n).

III (5 points)

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}.$$

1. (a) Calculer $u_1 ; v_1$.

Correction :

On a $u_1 = \dfrac{1+4}{3} = \dfrac{5}{3}$. et $v_1 = \dfrac{1+8}{5} = \dfrac{9}{5}$.

(b) Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$. Montrer que (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{15}$.

Correction :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} \\ &= v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} - \frac{u_n + 2v_n}{3} \\ &= \frac{3u_n + 12v_n - 5u_n - 10v_n}{15} \\ &= \frac{2v_n - 2u_n}{15} \\ &= \frac{2}{15} w_n \end{aligned}$$

En conséquence (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{15}$ avec $w_0 = v_0 - u_0 = 1$.

(c) En déduire la forme explicite de (w_n) puis sa limite.

Correction :

Par propriété, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_n = w_0 \times q^n = \left(\frac{2}{15}\right)^n$$

Et $-1 < \dfrac{2}{15} < 1$ donc par propriété : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{15}\right)^n = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$.

(d) On admet que (u_n) et (v_n) convergent. Montrer qu'alors elles ont la même limite.

Correction :

Soit ℓ la limite de (u_n) et ℓ' la limite de (v_n).
Pour tout entier naturel n on a $w_n = v_n - u_n$.
Et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, donc par opérations sur les limites (somme), on a :

$$\ell' - \ell = 0$$

Et donc $\ell = \ell'$.

2. **Hors barême (à garder pour la fin).**. Le but est de montrer que (u_n) et (v_n) convergent.

(a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

Correction :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n \\ &= \frac{-2u_n + 2v_n}{3} \\ &= 2w_n \\ &> 0 \quad (\text{car } w_n > 0) \end{aligned}$$

Donc (u_n) est croissante.
De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_n + 4v_n}{5} - v_n \\ &= \frac{u_n - v_n}{5} \\ &= -w_n \\ &< 0 \quad (\text{car } w_n > 0) \end{aligned}$$

Donc (v_n) est décroissante.

(b) Déduire des résultats des questions précédentes que (u_n) est majorée et (v_n) minorée.

Correction :

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n > 0$ et donc $v_n > u_n$.
D'autre part, (u_n) est croissante donc $u_n > u_0$ et (v_n) est décroissante donc $v_n < v_0$.
Alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n > u_n > u_0$ donc (v_n) minorée par u_0.
Et $v_0 > v_n > u_n$ donc (u_n) majorée par v_0.

(c) En déduire que tes suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

Correction :

(u_n) est croissante et majorée et (v_n) est décroissante et minorée, donc par théorème, (u_n) converge vers ℓ et (u_n) converge vers ℓ'

3. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 10v_n$ est constante.
   En déduire la limite commune des suites (u_n) et (v_n).

Correction :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= 3\frac{u_n + 2v_n}{3} + 10\frac{u_n + 4v_n}{5} \\ &= \frac{15u_n + 30v_n + 30u_n + 120v_n}{15} \\ &= \frac{45u_n + 150v_n}{15} \\ &= 3u_n + 10v_n \\ &= t_n \end{aligned}$$

(t_n) est donc stationnaire et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t_n = 3u_0 + 10v_0 = 23$.
On a alors d'une part $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 23$ et d'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 3\ell + 10\ell'$
Mais $\ell = \ell'$, donc $13\ell = 23$ et $\ell = \dfrac{23}{13}$.

IV **(1 point)** Soit (u_n) une suite satisfaisant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} + nu_n = 3$$

Montrer que si (u_n) converge, alors sa limite est nulle.

Correction :

Soit ℓ la limite de (u_n). On a pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{u_{n+1}}{n} + u_n = \dfrac{3}{n}$,
donc $u_n = \dfrac{3}{n} - \dfrac{u_{n+1}}{n}$.
Et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = 0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$, donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{n} = 0$ (par opérations sur les limites).
Alors par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.