DS N°1 : Récurrence, révisions suites et fonctions (1h30)

I (3 points) Questions Rapides :

1. Déterminer la fonction dérivée sur $\mathbb{R}$:

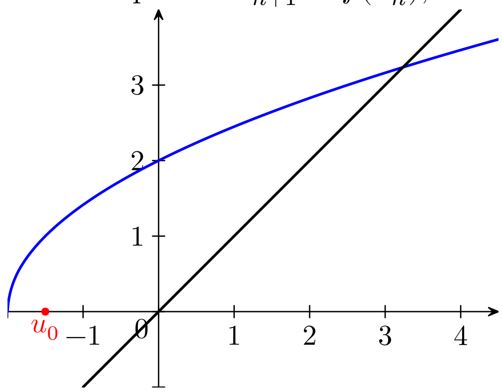
$$f(x) = \frac{1-2\mathrm{e}^x}{3\mathrm{e}^x+1}.$$

2. Déterminer les limites des suites suivantes :
   (a) $u_n = -n^2 + 3n + 5$ ($n \in \mathbb{N}$)
   (b) $w_n = 5^n - 3^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$)

II

(1 point) Le graphique suivant représente une fonction f. Il est également donné un réel u_0 sur l'axe des abscisses. On définit (u_n) par récurrence en posant $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Représentez les 4 premiers termes u_0, u_1, u_2, u_3 sur l'axe des abscisses.
2. Conjecturez les variations de (u_n).
   ....
3. Conjecturez la limite éventuelle de (u_n).
   ....



III

(4 points) On a tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[0; 3]$ par :

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{cx^2}$$

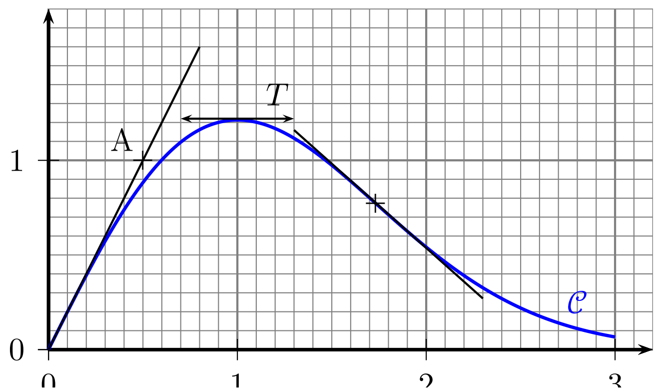
où a, b et c sont des nombres réels.

On note f' la fonction dérivée de f. La droite $\mathscr{D}$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 ; elle passe par le point A de coordonnées (0,5 ; 1). La tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer graphiquement $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(1)$.
2. Montrer que

$$f'(x) = (2acx^2 + 2bcx + a)\mathrm{e}^{cx^2}$$

3. Déterminer les valeurs de a, b et c.



IV **(12 point)** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}.$$

1. Calculer u_1.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{6x + 2}{x + 5}.$$

   Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   (b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 2$.
3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5}.$$

   (b) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est décroissante.
4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}.$$

   (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.
   (b) Déterminer la forme explicite de (v_n) ainsi que sa limite.
   (c) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a

$$u_n = \frac{v_n + 2}{1 - v_n}$$

   (d) En déduire la limite de (u_n).
5. On considère la fonction Python seuil ci-contre, où A est un nombre réel strictement plus grand que 2.
   Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande seuil (2.001) puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```python
def seuil (A) :
  n = 0
  u = 8
  while u > A :
     u = (6*u + 2)/(u + 5)
     n = n + 1
  return n
```

V✳ Soit f une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, u_0 étant un réel fixé.
Montrer que (u_n) est monotone.

VI✳ Soit f une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, u_0 étant un réel fixé.
On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ les deux suites (v_n) et (w_n) par : $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$
Montrer que (v_n) et (w_n) sont des suites monotones.

Spé math (terminale) *7 octobre 2024.*

DS N° 1 : Récurrence, révisions suites et fonctions (1h30)

(I) (3 points) Questions Rapides :

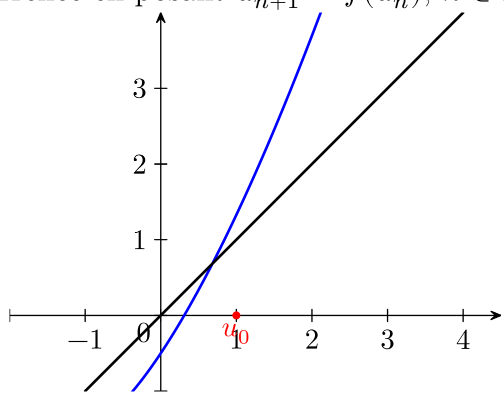
1. Déterminer la fonction dérivée sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1 - 3e^x}{2e^x + 1}.$$

2. Déterminer les limites des suites suivantes :
   (a) $u_n = n^2 - 3n + 5$ $(n \in \mathbb{N})$
   (b) $w_n = 5^n - 2^{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$

(II) **(1 point)** Le graphique suivant représente une fonction f. Il est également donné un réel u_0 sur l'axe des abscisses. On définit (u_n) par récurrence en posant $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Représentez les 4 premiers termes u_0, u_1, u_2, u_3 sur l'axe des abscisses.
2. Conjecturez les variations de (u_n).
   ....
3. Conjecturez la limite éventuelle de (u_n).
   ....



(III) **(4 points)** On a tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[0; 3]$ par :

$$f(x) = (bx + c)e^{ax^2}$$

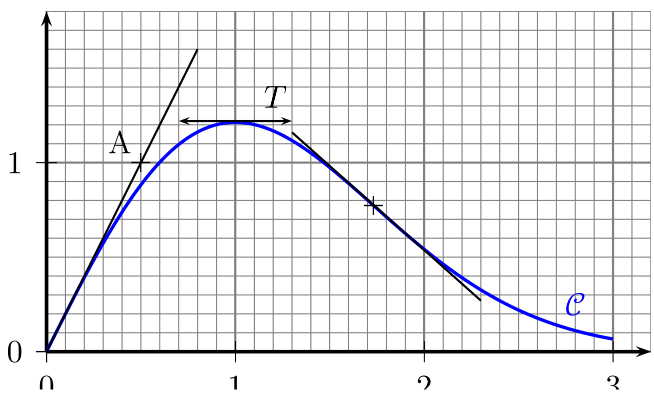
où a, b et c sont des nombres réels.

On note f' la fonction dérivée de f. La droite $\mathcal{D}$ est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 ; elle passe par le point A de coordonnées (0,5 ; 1). La tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer graphiquement $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(1)$.
2. Montrer que

$$f'(x) = (2abx^2 + 2acx + b)e^{ax^2}$$

3. Déterminer les valeurs de a, b et c.



IV **(12 point)** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}.$$

1. Calculer u_1.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{6x + 2}{x + 5}.$$

   Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   (b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 2$.
3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5}.$$

   (b) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est décroissante.
4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}.$$

   (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.
   (b) Déterminer la forme explicite de (v_n) ainsi que sa limite.
   (c) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a

$$u_n = \frac{v_n + 2}{1 - v_n}$$

   (d) En déduire la limite de (u_n).
5. On considère la fonction Python seuil ci-contre, où A est un nombre réel strictement plus grand que 2.
   Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande seuil (2.001) puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```python
def seuil (A) :
  n = 0
  u = 8
  while u > A :
     u = (6*u + 2)/(u + 5)
     n = n + 1
  return n
```

V✳ Soit f une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, u_0 étant un réel fixé.
Montrer que (u_n) est monotone.

VI✳ Soit f une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, u_0 étant un réel fixé.
On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ les deux suites (v_n) et (w_n) par : $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$
Montrer que (v_n) et (w_n) sont des suites monotones.