

Df N° 1

I ① $f(x) = \frac{1-2e^x}{3e^x+1} ; x \in \mathbb{R}$

Alors $f'(x) = \frac{(3e^x+1)(-2e^x) - 3e^x(1-2e^x)}{(3e^x+1)^2}$
 $= \frac{-5e^x}{(3e^x+1)^2}$

② a) $u_n = -n^2 + 3n + 5 ; n \in \mathbb{N}$
 $= n^2 \left(-1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} \right)$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} \right) = -1$

Donc par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

b) $w_n = 5^n - 3^{2n} ; n \in \mathbb{N}$
 $= 5^n - 9^n$
 $= 9^n \left(\left(\frac{5}{9} \right)^n - 1 \right)$

$9 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 9^n = +\infty ; -1 < \frac{5}{9} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{9} \right)^n = 0$

Alors par somme et produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$.

III ① Par lecture graphique: $f(0) = 0 ; f'(0) = 2$ (coeff dir de D)
et $f'(1) = 0$.

② $\forall x \in [9, 3]$

$f'(x) = a e^{cx^2} + (ax+b)2cx e^{cx^2}$

$$\text{donc } f'(n) = e^{cn^2} (a + 2can^2 + 2cbn) \\ = e^{cn^2} (2acn^2 + 2bcn + a)$$

Il s'agit bien du résultat demandé.

③ $f(0) = 0$ donc $be^0 = 0$ donc $b = 0$.
 $f'(0) = 2$ donc $e^0(a) = 2$ donc $a = 2$.
 $f'(1) = 0$ donc $e^c(2ac + 2bc + a) = 0$

et $a = 2$, $b = 0$ donc $e^c(4c + 2) = 0$

comme $e^c \neq 0$, on déduit $4c + 2 = 0$ donc $c = -\frac{1}{2}$

Nous avons $a = 2$; $b = 0$; $c = -\frac{1}{2}$.

III ① $u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}$; $u_0 = 8$

Donc $u_1 = \frac{6u_0 + 2}{u_0 + 5} = \frac{50}{13}$.

② ② $f(x) = \frac{6x + 2}{x + 5}$; $x \in \mathbb{R}_+$

$\forall x \geq 0$; $f'(x) = \frac{(x+5)6 - (6x+2)}{(x+5)^2} = \frac{28}{(x+5)^2}$.

sur $\mathbb{R}_+$: $(x+5)^2 > 0$ donc par quotient $f'(x) > 0$

donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$

2b Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}; u_n > 2$.

Initialisation: pour $n=0$; $u_0 = 8 > 2$.

Hérédité: Soit $k \in \mathbb{N}$; on suppose $u_k > 2$ et montrons $u_{k+1} > 2$.
Hérédité démontée.

On a $u_k > 2$

donc $f(u_k) > f(2)$ car f est croissante

dnc $u_{k+1} > 2$ (Car $f(2)=2$)

ainsi l'hérédité est démontée. Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}; u_n > 2$

3a $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - u_n = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5} - u_n$

$$= \frac{6u_n + 2 - u_n(u_n + 5)}{u_n + 5}$$

$$= \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n + 5}$$

D'autre part $(2 - u_n)(u_n + 1) = u_n - u_n^2 + 2$

Donc finalement: $u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5}$

3b: On a d'après 2b: $u_n > 2$ dnc $2 - u_n < 0$
et $u_n + 1 > 3 > 0$
et $u_n + 5 > 6 > 0$

Donc par produit et quotient $u_{n+1} - u_n < 0$

Ainsi (u_n) est décroissante

4a $\forall n \in \mathbb{N}; \quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 1}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{6u_n + 2}{u_n + 5} - 2}{\frac{6u_n + 2}{u_n + 5} + 1} \\
 &= \frac{6u_n + 2 - 2(u_n + 5)}{u_n + 5} \cdot \frac{u_n + 5}{6u_n + 2 + u_n + 5} \\
 &= \frac{4u_n + 8}{7u_n + 7} \\
 &= \frac{4}{7} \frac{u_n - 2}{u_n + 1} \\
 &= \frac{4}{7} v_n
 \end{aligned}$$

Ainsi: (v_n) est géométrique de raison $\frac{4}{7}$ avec $v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

4b: Par propriété: $v_n = v_0 \cdot q^n = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^n$.

De plus $-1 < \frac{4}{7} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n = 0$

Ainsi: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

4c $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$

donc $(u_n + 1)v_n = u_n - 2$

donc $u_n v_n - u_n = -v_n - 2$

donc $u_n(v_n - 1) = -v_n - 2$

donc $u_n = \frac{-v_n - 2}{v_n - 1}$ et alors $u_n = \frac{v_n + 2}{1 - v_n}$

4d $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n + 2 = 2$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - v_n = 1$$

Ainsi par quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

⑤ Soit $(2, 0.01)$ renvoie la première valeur de n pour laquelle $u_n \leq 2,001$.

A la calculatrice, la valeur obtenue est : $n = 14$